- **关联、相邻、邻接**
  - 点和点：邻接
  - 点和边：关联
  - 边和边：相邻

- **导出子图**：（点不一定全，边也不一定全，但只要两边的点都有就一定有边）设 $G_1=<V_1,E_1>$ 是 $G=<V,E>$ 的子图。若 $E_1=\{e|e\in E\wedge e\text{的端点都在}V_1\text{中}\}$，则称 G_1 为 G 的由 V_1 导出的子图，或简称 G 的导出子图。

- **生成子图**：（只要求点是全的，边不一定全）设 $G_1=<V_1,E_1>$ 是 $G=<V,E>$ 的子图。若 $V_1=V$，则称 G_1 为 G 的生成子图。

有向图 通路 回路 连通

- **简单通路**：有向图+无重复边

- **基本通路**：有向图+无重复点

- **简单回路**：有向图+一圈+无重复边

- **基本回路**：有向图+一圈+除了始点终点无重复点

- **半通路**（有边）、**通路**（有同向边）

- **完备通路**：称通过有向图中**所有顶点**的通路为完备通路。

- **完备回路**：称通过有向图中**所有顶点**的回路为完备回路。

- **完备半通路**：称通过有向图中**所有顶点的半通路**为完备半通路。

- **u连接到v**、**u可达v**（从 u 到 v 有“正向”边）

- 在 n 阶有向图中，**任何基本通路的长度都不超过** $n-1$，**任何基本回路的长度都不超过** n。

- **强连通的、3度连通的**：（任意两点互相可达）

- **单向连通的、2度连通的**：（任意两点至少一个方向可达）

- **弱连通的、1度连通的**：（任意两点互相连接）

- **不连通的、0度连通的**：（不弱连通）

- 有向图 D 是强连通的当且仅当 D 有一条完备回路。

- 有向图 D 是单向连通的当且仅当 D 有完备通路。
- 有向图 D 是弱连通的当且仅当 D 有完备半通路。

无向图 链 连通

- **简单链**：（各边不同）
- **基本链**：（各点不同）
- **闭合链**：（第一个点和最后一个点相同）
- **圈**：（第一个点和最后一个点相同且各边不同）

邻接矩阵、可达性矩阵、关联矩阵

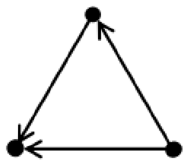
- 设 R 和 M 分别是 n 阶有向图 D 的可达性矩阵和邻接矩阵，则 $R = B(I + M + M^2 + ... + M^{n-1}) = B((I + M)^{n-1})$，其中 I 是 n 阶单位矩阵。
- 设 R 和 M 分别是 n 阶有向图 D 的可达性矩阵和邻接矩阵，则
  - D 是**强连通**的当且仅当 R 的元素全为 1。
  - D 是**单向连通**的当且仅当 $B(R + R^T)$ 的元素全为 1。
  - D 是**弱连通**的当且仅当 $B(I + N + ... + N^{n-1}) = B((I + N)^{n-1})$ 的元素全为 1，其中 $N = B(M + M^T)$ 。
  - D 是**无回路**的当且仅当 $M + ... + M^n$ 的主对角线元素全为 0。
- **关联矩阵** $B = (b_{ij})_{n\times m}$：n行(n个点) m列(m条边)

$$\text{有向图：} b_{ij} \begin{cases} 1 & \text{若}u_i\text{是弧}a_j\text{的始点} \\ -1 & \text{若}u_i\text{是弧}a_j\text{的终点} \\ 0 & \text{若}u_i\text{不是弧}a_j\text{的端点} \end{cases}$$

$$\text{无向图：} b_{ij} = e_j\text{与}u_i\text{的关联次数}$$

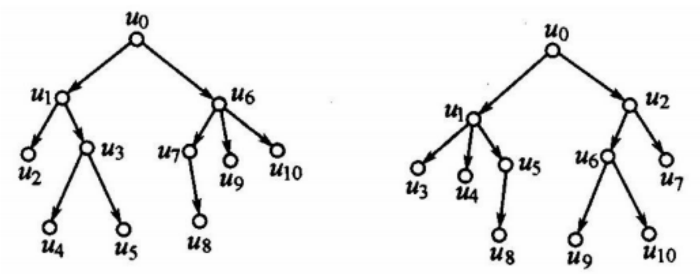
树

- **树的等价定义**
  设 T 是 (n, m) 无向图。以下说法是等价的。
  - T 连通且无圈。
  - T **无自环，并且每对顶点之间有唯一基本链。**
  - T 连通，在 T 中加一边仅有一个圈。
  - T 连通，去掉任何一边就不连通了。
  - T 连通，并且 $m = n - 1$。
  - T 无圈，并且 $m = n - 1$。
- **有向树**：将一个树的边**加上任意的方向**，就得到**有向树**。任何有向树都是**弱连通的无回路**有向图，但是弱连通的无回路有向图未必是有向树（如下图）。



- **树根、根数**：若有向树 T 有一个顶点的引入次数为0，其余顶点的引入次数都为 1，则称 T 为**根树**。称根树中引入次数为 0 的顶点为**树根**。

- **树叶、分支顶点、级**：从树根到一个顶点的通路的长度称为该顶点的**级**。



作为根树，以上两树是一样的，作为有序树，它们是不同的

- 每个顶点的引出次数都**等于 m 或 0** 的根树称为**完全 m 元树。**

- 若无向图 G 的生成子图 T 是树，则称 T 为 G 的**生成树**。

- **定理12.7**：**无向图 G 有生成树当且仅当它是连通的。**

- **基本圈(一个弦+一堆树枝)**、**基本圈组(基本圈组成的集合)**：(n, m) 无向图 G 有 m-n+1 个基本圈

- **基本割集(一个树枝+一堆弦)**、**基本割集组(基本割集组成的集合)**：(n, m) 无向图 G 有 n-1 个基本割集

- 任何圈和任何割集都有**偶数条**（包含零条）公共边。

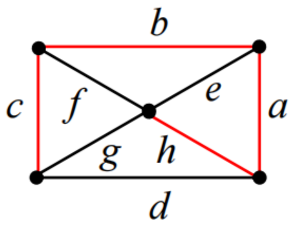
  •**证明** 设 C 和 D 分别是图 G 中的圈和割集。将 D 中边从 G 中去掉后，G 的顶点被分成两部分 V_1 和 V_2。若圈 C 上顶点全在 V_1 中（或 V_2 中），则 C 和 D 有 0 条公共边。否则设 u 是 C 上属于 V_1 的顶点，从 u 出发沿圈 C 走，每通过一条 D 中边，就从 V_1 中点到 V_2 中点，或者从 V_2 中点到 V_1 中点，而通过不在 D 中的边，则仍然在 V_1 中 (或 V_2 中)。因此，当回到 V_1 中的点 u 时，一定通过了偶数条 D 中的边。所以，C 和 D 有偶数条公共边。

- 给定图 G 的生成树 T。设 $D=\{e_1,...,e_k\}$ 是基本割集，其中 e_1 是树枝，$e_2,...,e_k$ 是弦，则 e_1 **包含在对应于** $e_2,...,e_k$ **的基本圈(一个弦一堆树枝)里，但不**

包含在任何其它基本圈里。

•**证明** 设 C 是 e_i 对应的基本圈，其中 $2 \le i \le k$。 e_i是 C 和 D 的公共边，因为 C 和 D 有偶数条公共边，所以它们还有公共边。C 中的边除了 e_i 之外都是树枝，所以 e_1 是 C 和 D 的公共边。设 C' 是弦 e 对应的基本圈，其中 e 与 $e_2, \cdots, e_k$ 不同。 C' 中的边除了 e 之外都是树枝， $e_2, \cdots, e_k$ 不可能在 C' 中，若 e_1 包含在 C' 中，则 C' 和 D 有 1 条公共边，矛盾。

- 给定图 G 的生成树 T 。设 $C = (e_1, ..., e_k)$ 是基本圈，其中 e_1 是弦，$e_2, ..., e_k$ 是树枝，则 e_1 **包含在对应于 $e_2, ..., e_k$ 的基本割集(一个树枝一堆弦)中，但不包含在任何其它基本割集中。**



在左图中，树枝为

h, a, b, c；

基本圈组为

{ (h, a, e) , (h, a, b, f) , (h, a, b, c, g) , (a, b, c, d)}

• 基本割集组为

{{c, g, d}, {b, f, g, d}, {a, e, f, g, d}, {h, e, g, f }}

•显然：c只包含在对应于g或者d的基本圈(h, a, b, c, g)或(a, b, c, d)中； e只包含在对应于h或者a的基本割集{h, e, g, f }或{a, e, f, g, d}中

欧拉图和哈密顿图

- **欧拉圈、欧拉图、欧拉链**
- 连通无向图 G 是**欧拉图**当且仅当 G 的**每个顶点都是偶顶点。**
- 在连通无向图 G 中存在连接顶点 u 和 v 的**欧拉链**当且仅当**只有 u 和 v 是奇顶点。**
- **欧拉回路、欧拉图、欧拉通路**
- 强连通有向图 D 是**欧拉图**当且仅当 D 中每个顶点的**引入次数与引出次数相同。**
- 单向连通有向图 D 有从顶点 u 到 v 的**欧拉通路**当且仅当 u **的引出次数比引入次数大1**，v **的引入次数比引出次数大1**，D **中其它顶点的引入次数与引出次数相同。**
- **哈密顿圈、哈密顿图、哈密顿链**

- **哈密顿图的必要条件（只能判断不是哈密顿图）**：若无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，U 是 V 的非空真子集，则 $p(G-U)\leq|U|$ 。其中 $p(G-U)$ 是从 G 中删除 U 中所有顶点及它们关联的边所得子图的连通分支数。

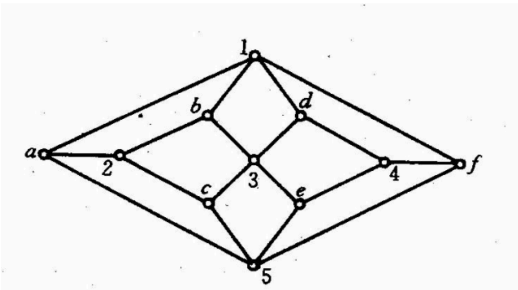
•**证明** 设 C 是 G 的一个哈密顿圈。从 C 中去掉一个顶点，它仍是连通的。随后每去掉一个顶点，连通分支数至多加 1，故 $p(C-U)\leq|U|$。$C-U$ 是 $G-U$ 的生成子图， $p(G-U)\leq p(C-U)\leq|U|$。

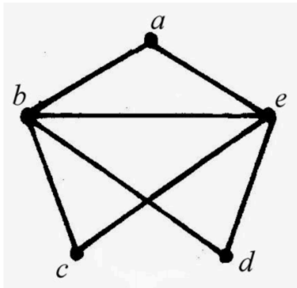
- **哈密顿链的必要条件（只能判断不是哈密顿链）**：若无向图 $G=<V,E>$ 有哈密顿链，U 是 V 的非空真子集，则 $p(G-U)\leq|U|+1$ 。其中 $p(G-U)$ 是从 G 中删除 U 中所有顶点及它们关联的边所得子图的连通分支数。

•**证明** 设 P 是 G 的哈密顿链。从 P 中每去掉一点，连通分支数至多加 1，所以 $p(P-U)\leq|U|+1$。
$P-U$ 是 $G-U$ 的生成子图，因此，

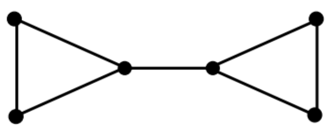
$$p(G-U)\leq p(P-U)\leq|U|+1$$

•上述必要条件常用于证明一个无向图没有哈密顿圈或哈密顿链。从左图中去掉顶点 1, 2, 3, 4, 5，成为 6 阶零图，所以它没有哈密顿圈，它有哈密顿链 (*a*, 2, *b*, 1, *d*, 4, *f*, 5, *e*, 3, *c*)。从右图中去掉顶点 *b* 和 *e*，成为 3 阶零图，所以它没有哈密顿圈，它有哈密顿链 (*c*, *b*, *a*, *e*, *d*)。





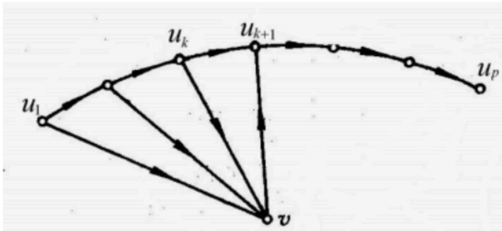
•上述存在哈密顿圈的必要条件不是充分条件。例如，左图满足存在哈密顿圈的必要条件，但是却没有哈密顿圈。右图中去掉中间两个顶点中任何一个，就不连通了，所以不满足存在哈密顿圈的必要条件，右图不是哈密顿图。

- **哈密顿图的充分条件**：设 $n>2$，若 n 阶简单无向图 G 中每对不相邻顶点次数之和 $\geq n$，则 G 是**哈密顿图。**
- **哈密顿链的充分条件**：若 n 阶简单无向图 G 中每对不相邻顶点次数之和 $\geq n-1$，则在 G 中存在**哈密顿链。**
- **哈密顿回路、哈密顿图、哈密顿通路**

- 在**有向完全图**中必存在哈密顿通路。

  •**证明** 设 $(u_1,\cdots, u_p)$ 是 n 阶有向完全图 $D = <V, A>$ 中最长基本通路。设 $p < n$。取不在该通路上的顶点 v，若 $<v, u_1>\in A$，则 $(v, u_1,\cdots, u_p)$ 是更长的基本通路。所以 $<u_1, v>\in A$ 。若 $<u_p, v>\in A$，则 $(u_1,\cdots, u_p, v)$ 是更长的基本通路。故 $<v, u_p>\in A$。一定有 $1 \le k < p$ 使得 $<u_k, v>\in A$ 且 $<v, u_{k+1}>\in A$。$(u_1,\cdots, u_k, v, u_{k+1}, \cdots, u_p)$ 是更长的基本通路。矛盾。因此，$p = n$，即 $(u_1,\cdots, u_p)$ 是哈密顿通路。



- 凡是**强连通的有向完全图**一定有哈密顿回路。

二分图

- 非平凡无向图 G 是二分图当且仅当 G **的每个圈的长度都是偶数。**
- **匹配**：二分图左边的点和右边的点相连，每个点最多连一条线
- **最大匹配**：在二分图 G 的所有匹配中，**边数最多的匹配**称为**最大匹配。**
- **从 X 到 Y 的匹配**
- **交错链、饱和顶点、非饱和顶点、可扩充链**
- **定理14.2**：二分图 $G=<V,E>$ 的匹配 M 是最大匹配当且仅当 G 中**不存在关于 M 的可扩充链**
- U **的邻域** $\Gamma(U)$
- **从X到Y的匹配的充要条件**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集。G 中存在从 X 到 Y 的匹配当且仅当满足以下相异性条件：对于 X 的任意子集 U，$\#\Gamma(U) \geq \#U$。
- **定理14.4 t条件 从X到Y的匹配的充分条件**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集。若存在正整数 t，使得 X 中每个顶点的次数 $\geq t$，而 Y 中每个顶点的次数 $\leq t$，则 G 中存在从 X 到 Y 的匹配。