题型

填空

证明

图论：9和12的概念

- 9 握手定理、连通、特殊的图（完全图正则图）
- 12 加一边有圈，去一边不连通；
- 13
- 14?
  集合论
  集合相等

解答

- 10
- 11 每个矩阵怎么求、三个矩阵的关系（从一个求另一个）
- 12 huffman编码 最优二元树
- 13
- 14 最大匹配、从X到Y的匹配（从X到Y的匹配一定是最大匹配）
- 图的建模（混合 欧拉图哈密顿图二分图树）

集合

证明：集合A=B

- 法1：使用集合相等的定义，证明：对于任意 x，$x \in A \Leftrightarrow x \in B$
- 法2：证明 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，即 $\forall x$，$x \in A \rightarrow x \in B$，$\forall x$，$x \in B \rightarrow x \in A$
- 法3：利用已知集合恒等式进行等式推演
- 法4：特征函数相同

证明：判断偏序

偏序：自反，反对称，传递
严格偏序：反自反，（反对称），传递
全序：偏序+任意两个元素可比
良序：偏序+任意非空子集有最小元

求：画哈斯图

省略自环、有向边的方向、某些定点之间的边

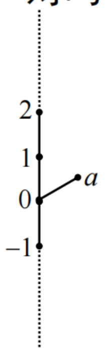
求：八大关系

定义6.12设 $<A, \preccurlyeq>$ 是偏序集，$B \subseteq A$，$b \in B$ 。

1. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $x \preccurlyeq b$，则称 b 为 B 的最大元。
2. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $b \preccurlyeq x$ ，则称 b 为 B 的最小元。
3. 若不存在 $x \in B$ 使得 $b < x$，则称 b 为 B 的极大元。
4. 若不存在 $x \in B$ 使得 $x < b$，则称 b 为 B 的极小元。

68

- B 的最大元：确实比 B 中其它元素都大。
- B 的极大元：不必比 B 中其它元素都大，只需在 B 中没有比它更大元素即可。
- 最大元必是极大元，极大元未必是最大元，若有多个极大元，则这些极大元互相不可比，这时没有最大元。
- B 最多只有一个最大元：若 a 和 b 都是 B 的最大元，则 $a \preccurlyeq b$（因为 b 是最大元），并且 $b \preccurlyeq a$（因为 a 是最大元），所以，$a = b$（因为 $\preccurlyeq$ 满足反对称性）。
- 若 B 有唯一的极大元，则该极大元必为最大元，对吗？不对。



设 $A = \mathbf{I} \cup \{a\}$

定义 A 上偏序 $\preccurlyeq$ 如下：

$$x \preccurlyeq y$$

$$\Leftrightarrow (x \in \mathbf{I} \wedge y \in \mathbf{I} \wedge x \leq y)$$

$$\vee (x \in \mathbf{I} \wedge x \leq 0 \wedge y = a)$$

则 A 有唯一极大元 a，但是没有最大元。

定义6.13设 $<A, \leqslant>$ 是偏序集，$B \subseteq A$，$b \in A$ 。

1. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $x \leqslant b$，则称 b 为 B 的上界。
2. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $b \leqslant x$，则称 b 为 B 的下界。
3. 称 B 的上界集合的最小元为 B 的最小上界，或上确界。
4. 称 B 的下界集合的最大元为 B 的最大下界，或下确界。

71

- B 的上确界：只要求在 A 中，不要求一定在B 中。
- B 的最大元：要求一定在 B 中。
- 最大元一定是上确界。若上确界在 B 中，则它一定是最大元。
- 最小元一定是下确界。若下确界在 B 中，则它一定是最小元。
- 每个集合最多只有一个上确界。
- 有上界不一定有上确界，可能没有最小的上界。
- 若 B 是有穷非空子集，则必有极大元和极小元。

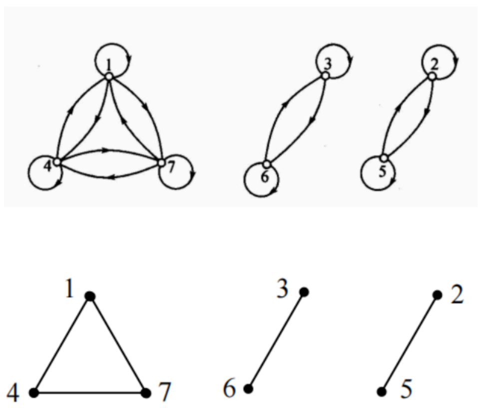
证明：等价关系

自反，对称，传递

求：画简图

不画箭头、双向二合一为无向

- **例6.18** 画出{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}上的等价关系 $\equiv_3$ 的关系图和简化关系图如下。



求：等价关系与划分的转化

•**定理6.8** 设 R 是非空集合 X 上的等价关系。R 等价类的集合 $\{[x]_R \mid x \in X\}$ 是 X 的划分，并称它为 X 模 R 的商集，记为 X/R，或记为$X\ (mod\ R)$ 。

•例6.20 商集 $X/U_X = \{X\}$， $X/I_X = \{\{x\} \mid x \in X\}$。
•令 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，则商集
$X/\equiv_3 = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$。
•例6.21 $\mathbf{N}/\equiv_6 = \{\{6n + k \mid n \in \mathbf{N}\} \mid k \in \mathbf{N} \wedge 0 \le k \le 5\}$
$=\{\{6n \mid n \in \mathbf{N}\}, \{6n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}, \cdots, \{6n + 5 \mid n \in \mathbf{N}\}\}$

•集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的划分
$\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$ 确定的等价关系是
$rts(\{<1, 2>, <4, 5>, <4, 6>\}) =$
$\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>,$
$<6, 6>, <1, 2>, <2, 1>, <4, 5>, <5, 4>,$
$<4, 6>, <6, 4>, <5, 6>, <6, 5>\}$,
•划分$\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$确定的等价关系是全域关系 U_A，
•划分$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$确定的等价关系是恒等关系 I_A。

• $A = \{1, 2, 3\}$ 上的划分与等价关系对应如下：

$\{\{1, 2, 3\}\}$	U_A
$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$	$\{<2, 3>, <3, 2>\} \cup I_A$
$\{\{2\}, \{1, 3\}\}$	$\{<1, 3>, <3, 1>\} \cup I_A$
$\{\{3\}, \{1, 2\}\}$	$\{<1, 2>, <2, 1>\} \cup I_A$
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	I_A

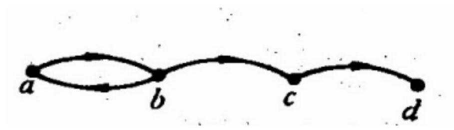
•由此看来，3 元集上的等价关系有 5 个。

求：集合表达式、关系矩阵、关系图、满足哪些关系

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>\}$。

• R 的关系图



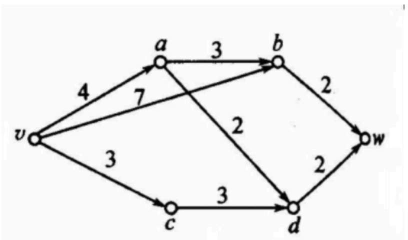
自反、反自反、对称、反对称、传递

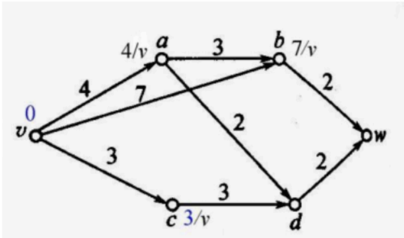
树、图

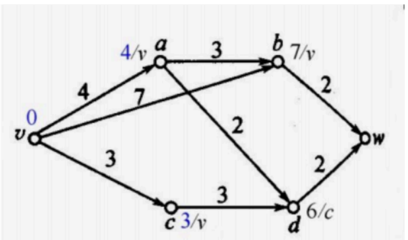
概念！！！！

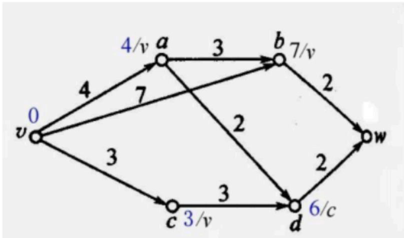
- 桥、生成树

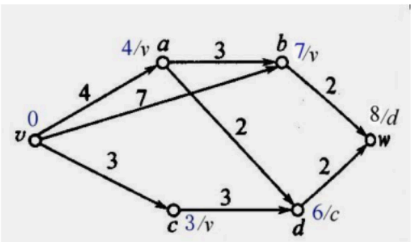
求：最短路

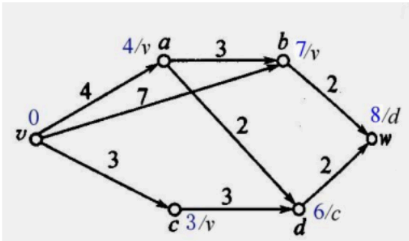












求：关键通路

- **关键通路**：在工序流线图中，从发点到收点的最长通路称为关键通路。**事件 u_j 在某条关键通路上当且仅当它的最早完成时间和最迟完成时间相等。
- **最早完成时间**：在工序流线图中，从发点 u_1 到事件 u_j 的最长通路的长度称为事件 u_j 的最早完成时间，记为 $TE(u_j)$ 。

求最早完成时间的算法

•给定工序流线图 $D = <V, A>$， $v \in V$，定义 v 的后继点集 $\Gamma^+(v)$ 和前驱点集 $\Gamma^-(v)$ 如下：

$$\Gamma^+(v) = \{u \mid u \in V \wedge <v, u> \in A\}$$

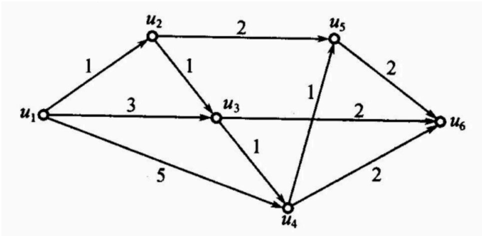
$$\Gamma^-(v) = \{u \mid u \in V \wedge <u, v> \in A\}$$

•显然，发点 u_1 的最早完成时间 $TE(u_1) = 0$。
然后求只以 u_1 为前驱点的顶点的最早完成时间。

•一般说来，若已求出顶点 v 的所有前驱点的最早完成时间，即可求出 v 的最早完成时间

$$TE(v) = \max\{ TE(u) + l(u, v) \mid u \in \Gamma^-(v)\}$$

直至求出收点的最早完成时间为止。



$TE(u_1) = 0$， $TE(u_2) = 0 + 1 = 1$，
$TE(u_3) = \max\{0 + 3, 1 + 1\} = 3$，
$TE(u_4) = \max\{0 + 5, 3 + 1\} = 5$，
$TE(u_5) = \max\{1 + 2, 5 + 1\} = 6$，
$TE(u_6) = \max\{6 + 2, 3 + 2, 5 + 2\} = 8$。

- **最迟完成时间**：给定工序流线图，在保证收点 u_n 的最早完成时间不增加的前提下，自发点 u_1 最迟到达事件 u_j 的时间称为 u_j 的最迟完成时间，记为 $TL(u_j)$ 。

求最迟完成时间的算法

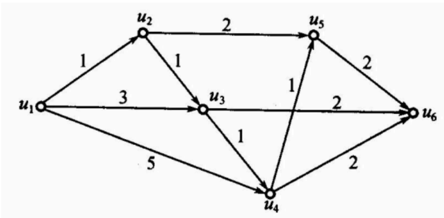
•显然，收点 u_n 的最迟完成时间 $TL(u_n) = TE(u_n)$ 。然后求只以 u_n 为后继点的顶点的最迟完成时间。

•一般说来，若已求出顶点 v 的所有后继点的最迟完成时间，即可求出 v 的最迟完成时间

$$TL(v) = \min\{TL(u) - l(v, u) \mid u\in\Gamma^+(v)\}$$

直至求出发点的最迟完成时间为止。

•即：最早求最大，最迟求最小



$TL(u_6) = TE(u_6) = 8$，
$TL(u_5) = 8 - 2 = 6$，
$TL(u_4) = \min\{ 6 - 1, 8 - 2\} = 5$，
$TL(u_3) = \min\{ 8 - 2, 5 - 1\} = 4$，
$TL(u_2) = \min\{ 6 - 2, 4 - 1\} = 3$，
$TL(u_1) = \min\{ 3 - 1, 4 - 3, 5 - 5\} = 0$。

- **缓冲时间**：给定工序流线图 $D=<V,A>$，$v\in V$，定义 v 的缓冲时间 $TS(v)=TL(v)-TE(v)$。
  - 事件 v 的发生可以比预定的最早完成时间推迟缓冲时间 $TS(v)$，而不会影响整个工程的进度。
  - 关键通路上的所有事件的缓冲时间都是0，即它们都要准时发生，不能推迟，并且关键通路上的工序都要按时完成，不能推迟。

求：最小生成树

Kruskal（克鲁斯卡尔）算法（避圈法）

- 求 n 阶带权简单连通无向图 $G = < V, E >$ 的最小生成树，其中 $n > 1$。

1.选取权最小的边 e_1，$i \leftarrow 1$；

2.若 $i = n - 1$ 则终止；

3.选取 $E - \{ e_1, \cdots, e_i\}$ 中使得 $\{ e_1, \cdots, e_i, e_{i+1}\}$ 中无圈的权最小的边 e_{i+1}；

4. $i \leftarrow i + 1$，转 2。

$e_1, \cdots, e_{n-1}$ 构成 G 的一个最小生成树。

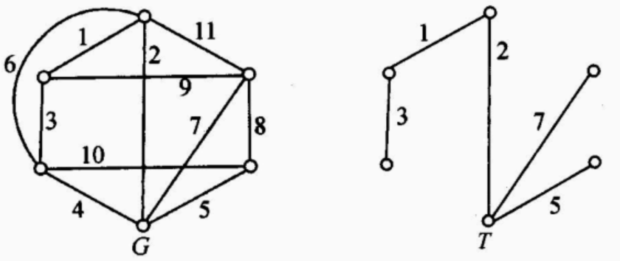


图 12.9 最小生成树

•顺次选取权为 1, 2, 3 的边，再加入权为 4 的边会产生圈，故不选它。选取权为 5 的边，再加入权为 6 的边会产生圈，故不选它。选取权为 7 的边，已选够 5 条，结束，得到权为 18 的最小生成树 T。

•此算法也可以用于有些边权值相同的图，只是此时求得的最小生成树可能不唯一。

求：最优二元树

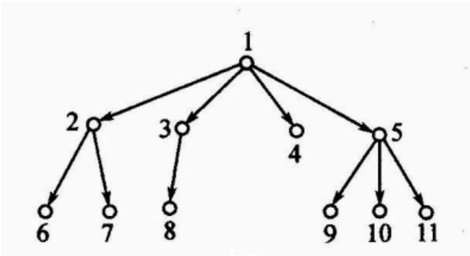
求：有序树转换为位置二元树

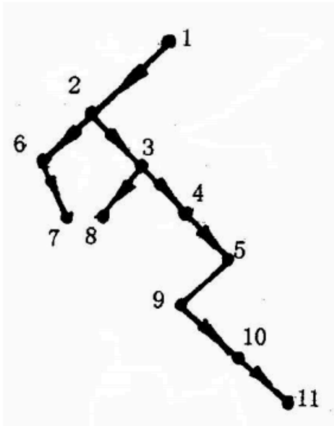
- 若 u 是原来有序树的树根，则它仍然是转换后的位置二元树的**树根。**
- 在原来有序树中，

  \+ 若顶点 u 是 v 的**大儿子**，则在转换后的位置二元树中，u 是 v 的**左儿子**；

+ 若顶点 u 是 v 的**大兄弟**，则在转换后的位置二元树中，u 是 v 的**右儿子**。

- 有序树　　　　位置二元树





判断：是否是欧拉图

- 连通无向图 G 是**欧拉图**当且仅当 G 的**每个顶点都是偶顶点。**
- 强连通有向图 D 是**欧拉图**当且仅当 D 中每个顶点的**引入次数与引出次数相同。**

判断：是否是欧拉链

- 在连通无向图 G 中存在连接顶点 u 和 v 的**欧拉链**当且仅当**只有 u 和 v 是奇顶点。**
- 单向连通有向图 D 有从顶点 u 到 v 的**欧拉通路**当且仅当 u **的引出次数比引入次数大1**，v **的引入次数比引出次数大1**，D 中**其它顶点的引入次数与引出次数相同。**

判断：是否是哈密顿图

- **必要条件**：若无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，U 是 V 的非空真子集，则 $p(G-U)\leq|U|$ 。
- **充分条件**：设 $n>2$，若 n 阶简单无向图 G 中每对不相邻顶点次数之和 $\geq n$ ，则 G 是**哈密顿图。**

判断：是否是哈密顿链

- **必要条件**：若无向图 $G=<V,E>$ 有哈密顿链，U 是 V 的非空真子集，则 $p(G-U)\leq|U|+1$ 。其中 $p(G-U)$ 是从 G 中删除 U 中所有顶点及它们关联的边所得子图的连通分支数。
- **充分条件**：若 n 阶简单无向图 G 中每对不相邻顶点次数之和 $\geq n-1$，则在 G 中存在**哈密顿链。**

判断：是否是二分图

非平凡无向图 G 是二分图当且仅当 G **的每个圈的长度都是偶数。**

证明：是否是二分图

构造两个点的集合，证明二者互补

求：二分图的最大匹配

最大匹配：在二分图 G 的所有匹配中，**边数最多的匹配**称为**最大匹配。**

求：从X到Y的匹配

1. 先任意找 G 中一个匹配 M 作为初始匹配.
2. 如果 M 还不是从 X 到 Y 的匹配, 即有 $x_0 \in X$ 为非饱和顶点.
3. 根据相异性条件, 设 x_0 有邻接顶点 $\{y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0k}\}$:
   - 若有某个 y_{0i} 为非饱和顶点, 则可扩充 (x_0, y_{0i}) 进 M ;
   - 若这 k 个邻接顶点都是饱和顶点,
     1. 则可构造 k 条以 x_0 为起点的交替链,
     2. 并**基于相异性条件, 必可找到一条可扩充链**.

证明：存在从X到Y的匹配

- 先用**t条件（充分条件）**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集。若存在正整数 t，使得 X 中每个顶点的次数 $\geq t$，而 Y 中每个顶点的次数 $\leq t$，则 G 中存在从 X 到 Y 的匹配。
  - 成立：存在
  - 不成立，用**充要条件**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集。G 中存在从 X 到 Y 的匹配当且仅当满足以下相异性条件：对于 X 的任意子集 U，$\#\Gamma(U) \geq \#U$ 。
    - 成立：存在
    - 不成立：不存在

技巧

数学归纳法

- 第一数学归纳法：第一个成立 + 只要k成立，k+1就成立

> 设*P*(*x*) 是自然数集合上的性质（或谓词），若能够证明：
>
> 1. *P*(0)为真；
> 2. 对于每个 $n \in \mathbf{N}$，若 $P(n)$为真，则 $P(n^+)$为真；
>
> 那么，对于每个 $x \in \mathbf{N}$，$P(x)$ 为真。
>
> $$P(0) \wedge \forall x(P(x) \to P(x^+)) \to \forall x P(x)$$
>
> 令 $S = \{ n \mid n \in \mathbf{N} \wedge P(n)\}$，则有 $0 \in S$，若 $n \in S$，则 $n^+ \in S$，所以 $S = \mathbf{N}$ 。这表明，对于每个 $n \in \mathbf{N}$，$P(n)$ 为真。
>
> 要证明 $P(n^+)$为真，只能用到 $P(n)$ 为真。

- 第二数学归纳法：比我小的成立，我就成立
  19-20 二.3

- 证明步骤：对于每个 $n \in \mathbf{N}$，只要对于所有 $k < n$ 都有 $P(k)$ 为真就可得出 $P(n)$ 为真，那么，对于每个 $n \in \mathbf{N}$，$P(n)$ 为真。

$$\forall n\,(\forall k\,(k < n \rightarrow P(k)) \rightarrow P(n)) \rightarrow \forall x P(x)$$

- 显然 $\forall k\,(k < 0 \rightarrow P(k))$ 为真，若证明了 $\forall k\,(k < 0 \rightarrow P(k)) \rightarrow P(0)$ 为真，就隐含着证明了 $P(0)$ 为真。所以，不必单独考虑 $n = 0$ 的情况。
- 要证明 $P(n)$为真，可以用到 $P(0), \cdots, P(n-1)$ 为真。

- **例8.3**证明所有 $n \geq 2$ 的整数都能写成素数的乘积。
- **证明** 设 $P(n)$: 能将 n 写成素数的乘积。

设 $n \geq 2$，若 $2 \leq k < n$，则 $P(k)$ 为真。

1. 若 n 是素数，显然它就是一个素数的乘积。
2. 若 n 不是素数，则它能表示成两个大于 1 的整数 a 和 b 的乘积，即 $n = a \times b$。根据归纳假设，能将 a 和 b 分别写成素数的乘积，所以能将 n 写成素数的乘积。

所以，对于所有 $n \geq 2$，$P(n)$ 为真。

a b比n小，所以a b都成立，有P(a) P(b)

证明充要条件

“a的充要条件是b”，即证明“a当且仅当b”

- **充分性证明：**“如果b成立，那么a一定成立”
- **必要性证明：**“如果a成立，那么b一定成立”

“a是b的充要条件”，即证明“b当且仅当a”

- **充分性证明：**“如果a成立，那么b一定成立”
- **必要性证明：**“如果b成立，那么a一定成立”

a当前仅当b

- **充分性证明：**“如果b成立，那么a一定成立”
- **必要性证明：**“如果a成立，那么b一定成立”