集合论主要内容及关联

集合 五	关系 六	函数 七	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	**关系的定义** **关系的相等** **关系的表示** - 矩阵表示 集合、矩阵、图表示 - 图表示	**函数的定义** - 部分函数（偏函数） - 全函数	**自然数的定义** - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数
集合的关系 - 相等、包含 子集 证明集合相等	**关系的性质** - (反)自反、(反)对称、传递任意两个点之间一条线都没有：对称+反对称	**函数的性质** - 单射、满射 - 双射	**自然数的性质** - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义
幂集 幂集元素个数 2^#A **集合的运算** 差集 对称差 集A-B 变A∩~B ∪, ∩, −, ⊕, ~	**关系的运算** - 作为集合的运算 自反闭包：R∪I - 逆、复合运算 对称：R∪R逆 传递：R∪到Rn或R∞ - 自反(对称、传递)闭包	**函数的运算** - 函数的合成 - 逆函数 双射才有逆函数 - 运算下是否满足函数性质	**无限集合等势** - 抽屉原理不再成立 特旅馆 - 基数大小：满(单) - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数 - 等势集合：2^N, R, [0, 1), (0, 1) - $\#A<\#2^A$
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉/鸽巢原理	**序关系** 全序：任何2个元素可比 良序：有最小元 - 偏序、全序、拟序、良序 偏序：自反 反对称 传递——哈斯图——8大元素		
有序偶 **笛卡尔积**	**等价关系** 等价：自反 对称 传递 ——等价类[x]_R ——划分 **划分**	**特征函数** 证明集合相等	

第5章 集合的基本概念及其运算

第一节后作业：1. (4)，2. (6)
第三节后作业： 6. (4) ， 9
第四节后作业： 10. (8)，11. (7)，12. (3)
15(3) (4) ， 17
第五节后作业： 19
第六节后作业： 21.(1) (3)
第七节后作业： 24.(2)，26.(1)

本章内容总结：

1. 集合，相等，（真）包含，子集，空集，全集，幂集
2. 交，并，（相对和绝对）补，对称差，广义交广义并
3. 文氏图，有穷集计数问题
4. 集合恒等式（等幂律，交换律，结合律，分配律，德·摩根律，吸收律，零律，同一律，排中律，矛盾律，余补律，双重否定律，补交转换律等）
5. 笛卡尔积
6. 字符串、字符串连接、语言、语言乘积

1. 枚举法/抽象法表示集合1.4 2.6
2. 给集合写幂集6.4；幂集的相关证明9 17
3. 集合的运算（加上幂集）10.8；证明恒等式11.7 12.3；给集合写幂集/广义并/广义交15.3 15.4
4. 包含排斥原理19
5. 给集合写集合的乘积21.1 21.3
6. 给集合写笛卡尔乘积24.2；笛卡尔相关证明

5.1 集合与元素

- 常用集合：自然数集 N、整数集 I Z、有理数集 Q、实数集 R、复数集 C、素数集 P
- { x | x 是高个子} **不是集合**，是一个模糊数学中的模糊集合，因为高个子是一个模糊概念。

5.2 集合间的相等和包含关系

- **外延公理(A=B)**：当且仅当 A, B 两集合都含有相同的元素时，称 A 和 B 相等，记为 $A = B$。

> 特别的，{1, 2, 3} = {2, 1, 3} **集合中元素无次序**； {1, 1} = {1} 不考虑集合中元素的**出现次数**，集合是每个元素的**重数都是 0 或 1** 的多重集

- **定理5.1**：$A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

- **定理5.2**：若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。
- **定理5.4**：空集 $\varnothing$ 是唯一的
- **单元集、n元集、有穷集、无穷集**

5.3 幂集

- **幂集**：A 的**所有子集**组成的集合称为 A 的**幂集**，记为 $\rho(A)$，即 $\rho(A)=\{X|X\subseteq A\}$，或者 $\rho(A)=\{X|\forall t(t\in X\to t\in A)\}$。
  - 空集的幂集仅含有元素 $\varnothing$，即 $\rho(\varnothing)=\{\varnothing\}$
  - 对于任意集合 A，$\varnothing\in\rho(A)$，$A\in\rho(A)$
- 基数和幂集的基数
  - **基数**：有穷集 A 的**元素个数**称为 A 的**基数**，记为 $\#A$。
  - **定理5.5**：$\#\rho(A)=2^{\#A}$
- 幂集的性质
  - $A\subseteq B\Leftrightarrow\rho(A)\subseteq\rho(B)$

    证明

    - $\boxed{A\subseteq B}\Rightarrow (x\subseteq A\to x\subseteq B)$
    - $(x\subseteq A\to x\subseteq B)\Rightarrow\boxed{(x\in\rho(A)\to x\in\rho(B))}$
    - $(x\in\rho(A)\to x\in\rho(B))\Rightarrow\rho(A)\subseteq\rho(B)$
    - $A\subseteq B\Rightarrow\rho(A)\subseteq\rho(B)$

    - $\rho(A)\subseteq\rho(B)\Rightarrow(x\in\rho(A)\to x\in\rho(B))$
    - $(x\in\rho(A)\to x\in\rho(B))\Rightarrow(x\subseteq A\to x\subseteq B)$
    - $(x\subseteq A\to x\subseteq B)\Rightarrow a\in A\to a\in B\Rightarrow A\subseteq B$
    - $\rho(A)\subseteq\rho(B)\to A\subseteq B$
  - $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$

    证明：

    - $\boxed{x\in\rho(A)\cup\rho(B)}\Rightarrow x\in\rho(A)\vee x\in\rho(B)$
    - $\Rightarrow\boxed{(x\subseteq A\vee x\subseteq B)}$
    - $\forall a(a\in x\to a\in A\vee a\in B)$
    - $\Rightarrow\forall a(a\in x\to a\in A\cup B)$
    - $\Rightarrow x\subseteq A\cup B$

    需要换成属于来做，不能用包含于

    - $x\subseteq A\cup B\Rightarrow x\in\rho(A\cup B)$
    - $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$

- $\rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \cap B)$
  - $x \in \rho(A) \cap \rho(B) \Leftrightarrow x \in \rho(A) \wedge x \in \rho(B)$
  - $\Leftrightarrow (x \subseteq A \wedge x \subseteq B)$
  - $\Leftrightarrow \forall a(a \in x \rightarrow a \in A \wedge a \in B)$
  - $\Leftrightarrow \forall a(a \in x \rightarrow a \in A \cap B)$
  - $\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B$
  - $\rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \cap B)$
- $\rho(A - B) \subseteq (\rho(A) - \rho(B)) \cup \{\varnothing\}$

  证明:
  - 当A-B= $\varnothing$， ρ(A-B) ={$\varnothing$}
  - 当A-B$\neq\varnothing$
    - $x \in \rho(A-B) \Rightarrow (x \subseteq (A-B))$
    - $(x \subseteq (A-B)) \Rightarrow x \subseteq A \wedge x \nsubseteq B$
    - $x \subseteq A \wedge x \nsubseteq B \Rightarrow (x \in \rho(A) \wedge x \notin \rho(B))$
    - $(x \in \rho(A) \wedge x \notin \rho(B)) \Rightarrow x \in (\rho(A) - \rho(B))$
    - $\Rightarrow \rho(A-B) \subseteq (\rho(A) - \rho(B))$
  - $\rho(A-B) \subseteq (\rho(A) - \rho(B)) \cup \{\varnothing\}$

5.4 集合的运算

1 简单计算

- **交集、并集、差集**
  - A 和 B 的**差集**，也称为 B 关于 A 的**相对补集**，$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- **聚合/集合族**：如果集合 A 中的**每个元素都是集合**，则称 A 为集合的聚合，或者集合族
- **不相交**：集合 A 和 B **没有公共元素**，即 $A \cap B = \varnothing$。
- **不相交聚合**：设 C 是一个**集合的聚合**，如果 C 中任何两个不同的元素**都是不相交的**，则称该聚合为不相交聚合，不相交聚合的元素互称为**互不相交的元素**
- **补集**：A 的**补集**$\sim A = U - A = \{x | x \notin A\}$，对任意的集合 A, B，若$A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$
- **对称差集**：A 和 B 的**对称差集**

$$\begin{aligned} A + B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \end{aligned}$$

2 集合恒等式

- 集合恒等式

幂等律 $A \cup A = A$ $A \cap A = A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律 $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

同一律 $A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$

零律 $A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

互补律/否定律 $A \cup \sim A = U$（也称为：排中律）

$A \cap \sim A = \varnothing$（也称为：矛盾律）

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

德摩根律 $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

对合律 $\sim \sim A = A$ （“双重否定律”）

$\sim \varnothing = U$ $\sim U = \varnothing$

德摩根律

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ 补交转换律：$A - B = A \cap \sim B$

+ 集合代数满足**对偶定理**：在**不含** $-$ **和** $+$ 的恒等式中，将 $\cup$ 和 $\cap$ 互换，$\varnothing$ 和 U 互换，得到的仍然是恒等式

+ 将不含 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 的命题逻辑等值式中的 $\vee$ 换为 $\cup$，$\wedge$ 换为 $\cap$，$\oplus$ 换为 $+$，$\neg$ 换为 $\sim$，0 换为 $\varnothing$，1 换为 U，$\Leftrightarrow$ 换为 $=$，就得到**集合恒等式**

集合恒等式 A=B的证明方法

- 法1：使用集合相等的定义，证明：对于任意 x，$x \in A \Leftrightarrow x \in B$
- 法2：证明 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$
- 法3：利用已知集合恒等式进行等式推演
- 例
  - **定理5.9**：设 A, B 是全集 U 的子集。$B = \sim A$ 当且仅当 $A \cup B = U$ 和 $A \cap B = \varnothing$
    - 证明：

    (充分性)若 $B = \sim A$，则 $A \cup B = A \cup \sim A = U$，

    又 $A \cap B = A \cap \sim A = \varnothing$

    (必要性) 若 $A \cup B = U$ 和 $A \cap B = \varnothing$，

    则 $B = U \cap B = (A \cup \sim A) \cap B = (A \cap B) \cup (\sim A \cap B) = \varnothing \cup (\sim A \cap B) = (A \cap \sim A) \cup (\sim A \cap B) = \sim A \cap (A \cup B) = \sim A \cap U = \sim A$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

  (1) $\Rightarrow$ (2) $A \cup B \subseteq B \cup B \subseteq B$

  又 $B \subseteq A \cup B$，故 $A \cup B = B$

  (2) $\Rightarrow$ (3) $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$

  (3) $\Rightarrow$ (4) $A - B = A \cap \sim B$

  $= A \cap B \cap \sim B = \varnothing$

  (4) $\Rightarrow$ (1) 若 $A \subseteq B$ 不成立，则有 x 使得 $x \in A$ 且 $x \notin B$， $x \in A - B = \varnothing$，矛盾。

- 证明：若 $A + B = A + C$，则 $B = C$。

  先证 $B \subseteq C$。

  任取 $x \in B$，分两种情况考虑。

  - 若 $x \in A$，则 $x \notin A + B$，因为$A + B = A + C$，则$x \notin A + C$，又因为 $x \in A$，所以 $x \in C$。
  - 若 $x \notin A$，则 $x \in A + B$，因为$A + B = A + C$，则$x \in A + C$，又因为 $x \notin A$，所以 $x \in C$。

  同样可证 $C \subseteq B$。

3 广义并、广义交

- **广义并、广义交**
  - **广义并**：A 的所有元素的并集 $\cup A = \{x | \exists a (a \in A \wedge x \in a)\}$
    若 $x \in \cup A$，则 x 至少是 A 的某个元素的元素
  - **广义交**：若$A \neq \varnothing$，A 的所有元素的交集 $\cap A = \{x | \forall a (a \in A \to x \in a)\}$
    若 $x \in \cap A$，则 x 必须是 A 的每个元素的元素

有时将集合族的元素表示为带角标的集合，如$A = \{S_i | i \in I\}$，称 I 为**角标集**。这里角标集 I 可以是空集，有穷集，也可以是无穷集。
也将 $\cup A$ 记为 $\cup_{i \in I} S_i$，将 $\cap A$ 记为 $\cap_{i \in I} S_i$

5.5 有穷集的计数原理

- 设 A 和 B 是两个**不相交**的有穷集，即 $A \cap B = \varnothing$，则 $\#(A \cup B) = \#A + \#B$
- **包含排斥原理**：若 A 和 B 是有穷集，则 $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
  - 推论：若 A, B, C 是有穷集，则
    $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C$

- **证明** # ($A \cup B \cup C$)

  = # ($A \cup B$) + # C – # (($A \cup B$) $\cap$ C)

  将 # ($A \cup B$) = # A + # B – # ($A \cap B$) 和

  # (($A \cup B$) $\cap$ C)= # (($A \cap C$) $\cup$ ($B \cap C$))

  = # ($A \cap C$) + # ($B \cap C$) – # ($A \cap B \cap C$)

  代入得到要证的公式。

- 推广：设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限集合，其基数分别为 $\#A_1, \#A_2, \ldots, \#A_n$，则

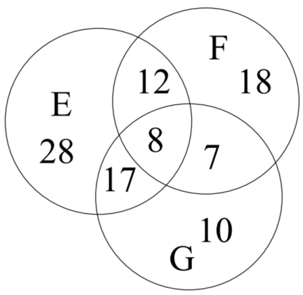
$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i$$

- 例5.15数学系有100名学生学外语，其中65人学英语，45人学法语，42人学德语，20人学英语和法语，25人学英语和德语，15人学法语和德语。问：同时学三门外语的有多少人？仅学一门外语的有多少人？
- **解** 设学英语、法语、德语的学生集合分别为 E, F, G。则

  $\#(E \cap F \cap G) = \#(E \cup F \cup G) - \#E - \#F$

  $- \#G + \#(E \cap F) + \#(E \cap G) + \#(F \cap G)$

  $= 100 - 65 - 45 - 42 + 20 + 25 + 15 = 8$



$\#(E \cap F \cap \sim G) = \#(E \cap F) -$
$\#(E \cap F \cap G) = 20 - 8 = 12$
$\#(E \cap G \cap \sim F) = \#(E \cap G) -$
$\#(E \cap F \cap G) = 25 - 8 = 17$
$\#(F \cap G \cap \sim E) = \#(F \cap G) -$
$\#(E \cap F \cap G) = 15 - 8 = 7$
只学英语的人数为
$65 - 12 - 8 - 17 = 28$
只学法语的人数为
$45 - 12 - 8 - 7 = 18$
只学德语的人数为
$42 - 17 - 8 - 7 = 10$
仅学一门外语的人数为
$28 + 18 + 10 = 56$

5.6 集合的归纳定义法

集合归纳定义的三个组成部分

1. **基础语句**：直接规定某些对象是该集合的元素。这保证了所定义的集合是非空的,同时也规定了构造集合的原子元素。
2. **归纳语句**：规定由已知元素得到新元素的办法。
3. **极限语句**：限定集合的范围，规定了哪些对象不是该集合的元素，保证了定义的集合是唯一的

   极限语句常省略不写

   非负偶数集 E 可归纳定义如下：

基础语句 $0 \in E$,

归纳语句 若 $n \in E$, 则 $n+2 \in E$ 。

字母表

- **字母表**（符号集）：符号的有穷非空集合，用 $\sum$ 表示，称 $\sum$ 中元素为符号或字母
- $\sum$上的**字或串**：有限长的字符串，其中每一个字符都是 $\sum$ 字母表中的元素。
- **长度**：字 x 中含有的**符号个数**称为 x 的长度，记为 $|x|$。
- **空串**：**长度为 0 的字**称为空串，记为 ϵ 。显然对任一字母表 $\sum$ ，ϵ都是$\sum$ 上的字符串。
- **连接**：字母表 $\sum$ 上的字 x 和 y 的连接是**将 y 接在 x 后面得到的字**，记为 xy 。
  连接运算满足结合律；
  连接运算不满足交换律；
  对于任意字x，$\epsilon x = x\epsilon = x$
- 所有 $\sum$ 上字的集合 $\sum^*$可归纳定义如下：
  1. $\varepsilon \in \Sigma^*$ ，
  2. 若 $x \in \Sigma^*$ 且 $a \in \Sigma$，则 $xa \in \Sigma^*$。
- 所有 $\sum$ 上非空字的集合 $\sum^+$可归纳定义如下：
  1. 若 $a \in \Sigma$，则 $a \in \Sigma^+$ ，
  2. 若 $x \in \Sigma^+$ 且 $a \in \Sigma$，则 $xa \in \Sigma^+$ 。

  显然，$\sum^+ = \sum^* - \{\epsilon\}, \sum^* = \sum^+ \cup \{\epsilon\}$
- 设 $x \in \sum^*$，$n \in N$，则串 x^n 定义如下：
  1. $x^0 = \epsilon$,
  2. $x^{n+1} = x^n x$ 。
- 称 $\sum^*$的子集为 $\sum$ 上的**语言**
- $\sum$ 上的语言 A 和 B 的**乘积**
  $AB = \{xy | x \in A \wedge y \in B\}$
  $AB = \{z | \exists x \exists y \, (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in B)\}$
  乘积运算满足结合律
  乘积运算不满足交换律
- 定义5.20 设 $A \subseteq \sum^*$，$n \in N$，A^n 定义如下：
  1. $A^0 = \{\epsilon\}$,
  2. $A^{n+1} = A^n A$。

     A^n是语言A本身n次乘积的结果。

- **定理5.13**
  设 A, B, C, D 是 Σ 上的语言。
  - $A\varnothing = \varnothing A = \varnothing$
  - $A\{\varepsilon\}=\{\varepsilon\}A = A$
  - $(AB)C = A(BC)$
  - 若 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$，则 $AC \subseteq BD$ 。
  - $A(B \cup C) = AB \cup AC$
  - $(B \cup C)A = BA \cup CA$
  - $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$
  - $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$

- **定理5.14**：设 $A, B \subseteq \sum^*$， m 和 n 是自然数。
  1. $A^m A^n = A^{m+n}$
  2. $(A^n)^m = A^{mn}$
  3. 若 $A \subseteq B$，则 $A^n \subseteq B^n$ 。

- 设A是$\sum^*$的子集，则
  - $A^* = \cup \{A^n | n\text{是自然数}\}$，即
    $A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots = \{\epsilon\} \cup A \cup A^2 \cup \ldots = \cup_{n=0}^{\infty} A^n$，集合$A^*$称为**星闭包**或简称**闭包**
  - 集合A^+定义为：$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \ldots = \cup_{n=1}^{\infty} A^n$，集合$A^+$称为A的**正闭包**

- **定理5.15**
  设 A 和 B 是Σ上语言， m 和 n 是自然数。
  - $A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$
  - $A^n \subseteq A^*$, $n \geq 0$
  - 若 $n \geq 1$，则 $A^n \subseteq A^+$
  - $A \subseteq AB^*$
  - $A \subseteq B^*A$
  - 若 $A \subseteq B$，则 $A^* \subseteq B^*$ 且 $A^+ \subseteq B^+$。
  - $AA^* = A^*A = A^+$
  - 若 $\varepsilon \in A$，则 $A^* = A^+$ 。
  - $(A^*)^* = (A^+)^* = A^*A^* = A^*$
  - $(A^+)^+ = A^+$

  注意： $A^+A^+ = A^+$ 不一定成立，如取 $A = \{a\}$,
  则 $A^+ = \{ a^n \mid n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 1\}$，而
  $A^+A^+ = \{ a^n \mid n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 2\}$。

5.7 有序偶和笛卡儿乘积

- 设 n > 2，**n 重序偶**定义为$< x1, \ldots, xn > = << x1, \ldots, xn-1 >, xn >$

- 集合 A 和 B 的**笛卡儿乘积** $A\times B$ 定义为：
  $A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$。
- 对于任意有穷集合 A 和 B， $\#(A\times B)=\#A\times\#B$
- 笛卡尔积的性质
  - A×(B ∪ C)=A×B ∪ A×C
  - A×(B ∩ C)=A×B ∩ A×C
  - A×(B - C)=A×B - A×C

  - (B ∪ C) ×A=B×A ∪ C×A
  - (B ∩ C) ×A=B×A∩ C×A
  - (B - C) ×A=B×A - C×A

第6章 关系

1. dom、ran相关的证明(2)；关系的性质相关的证明(3)；给图问关系(5)
2. 求复合关系(8)；复合相关的证明(12)；画自反、传递、对称闭包的关系图(13)；闭包相关的证明(14.3 15.3)
3. 画哈斯图、求最大最小元等(18)；判别偏序/线序/全序/良序(20 23)
   是偏序？->哈斯图->八大关系
4. a
   是等价？->画简图->

6.1 关系及其性质

- 二元关系（关系）：**有序偶**的集合

- 从 X 到 Y 的关系、X 上的关系

- 集合 A 上的**二元关系的数目**：如果 $\#A=n$，那么 $\#(A\times A)=n^2$，A 上的二元关系就有 2^{n^2} 种

- **全域关系**（$U_X=X\times X$）、**空关系**（$\varnothing$）、**恒等关系**（
  $I_X=\{<x,x>|x\in X\}$）

- <x,y>：定义域 $dom(R)=x$；值域 $ran(R)=y$

- **关系矩阵** M_R：R 为 $X=\{x_1,...,x_n\}$ 到 $Y=\{y_1,...,y_n\}$ 的关系，若 x_iRy_j 则关系矩阵i行j列元素 $r_{ij}=1$；否则 $r_{ij}=0$

- **布尔矩阵**的乘法：正常乘，大于等于1就是1，否则是0

- $A\leq B$：设 $A=(a_{ij})m\times n$ 和 $B=(b_{ij})m\times n$ 都是 m 行 n 列的矩阵，如果 A 的对应元素都小于等于 B 的对应元素，则记为 $A\leq B$。

- 若 R 和 S 都是从非空有穷集合 X 到非空有穷集合 Y 的关系，则 $R \subseteq S$ 当且仅当 $M_R \leq M_S$
- **关系图**：（R 是 $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$上的关系）顶点、有向边、自环

关系的性质

- **自反的**：
  - 每个 x 都 xRx
  - $\forall x(x \in X \to xRx)$
  - 关系矩阵**主对角线全为1**
  - 关系图中**每个顶点都有自环**
- **反自反的**：
  - 每个 x 都 $x\overline{R}x$
  - $\forall x(x \in X \to x\overline{R}x)$
  - 关系矩阵**主对角线全为0**
  - 关系图中**每个顶点都没自环**
- 既自反又反自反：空集上的空关系
- 既不自反又不反自反：集合 $\{1, 2\}$ 上的关系 $\{< 1, 1 >, < 1, 2 >\}$
- **对称的**：
  - 每个 x, y，只要 xRy，就有 yRx
  - $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$
  - 关系矩阵是**对称矩阵**
  - 关系图中没有单向边（要么**无弧**要么**两条相反方向**的弧）
- **反对称的**：
  - 每个 x, y，只要 xRy 且 yRx，就有 $x = y$
  - $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$
    $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to (yRx \to x = y))$
    $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to (x \neq y \to y\overline{R}x))$
    $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge x \neq y \to y\overline{R}x)$
  - 关系矩阵中，若 $i \neq j$，则 $r_{ij} \wedge r_{ji} = 0$
  - 关系图中没有双向边（要么**无弧**要么**一条**弧）
- 既对称又反对称：只有自环的关系图，如 $\{< 1, 1 >\}$
- 既不对称又不反对称：$\{< 1, 2 >, < 2, 1 >, < 1, 3 >\}$
- **传递的**

- 每个 x, y, z，只要 xRy 且 yRz，就有 xRz
- $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

  $\Leftrightarrow \neg\neg \forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

  $\Leftrightarrow \neg \exists x \exists y \exists z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \wedge x\overline{R}z)$
- 关系矩阵 $M_R * M_R \leq M_R$
- 关系图中若从顶点 x 到顶点 y 有长度大于 1 的通路，则必有从 x 到 y 的有向边

关系性质	关系图特征	关系矩阵特性	集合表达式
自反性	每一个结点处有一环	主对角线元素均为1	$I_x \subseteq R$
反自反性	每一个结点处均无环	主对角线元素均为0	$I_x \cap R = \varnothing$
对称性	任两点间，要么没有边，要么有方向相反的双边	矩阵为对称矩阵	$R = R^{-1}$
反对称性	若有边，则有单边(没有边成对出现)（即任两点间最多一条边）	当分量c_{ij}=1(i不等于j)时，c_{ji}=0	$R \cap R^{-1} \subseteq I_x$
传递性	若有双边则必有双环，有三角形，必是向量三角形。且如果结点$v_1, v_2, .., v_n$间有边v_1v_2, v_2v_3,..,$v_{n-1}v_n$，则必有边v_1v_n	若r_{ij}=1,且r_{jk}=1则r_{ik}=1	$R \circ R \subseteq R$ $M_R * M_R \leq M_R$

R 是自反的 iff $I_X \subseteq R$

R 是反自反的 iff $I_X \cap R = \varnothing$

R 是对称的 iff $R^{-1} = R$

R 是反对称的 iff $R \cap R^{-1} \subseteq I_X$

R 是传递的 iff $R \circ R \subseteq R$

6.2 关系的运算

- $R \cap S, R \cup S, R - S, R + S, \sim R$

  尤其注意 $R + S$ 是**对称差集**，其矩阵相应地做**异或**运算

  $(M_{R+S})_{ij} = (M_R)_{ij} \oplus (M_S)_{ij}$

- **复合关系**：$R \circ S = \{< x, z > \mid \exists y\ (xRy \wedge ySz)\}$

  显然，$R \circ I_A = I_A \circ R = R$

- 设 R, S, P 分别是从 X 到 Y，Y 到 Z，Z 到 W 的关系，则

  $(R \circ S) \circ P = R \circ (S \circ P) = R \circ S \circ P$

- R 的 n 次幂 R^n:
  - 1. $R^0 = I_X$
  - 2. $R^{n+1} = R^n \circ R$

  可归纳证明：对于任意自然数 m 和 n，
  - 1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
  - 2. $(R^m)^n = R^{mn}$

- 关系复合的矩阵运算
  - •设 $X = \{x_1,\cdots, x_m\}$, $Y = \{y_1,\cdots, y_n\}$, $Z = \{z_1,\cdots, z_p\}$,
    R 是从 X 到 Y 的关系， S 是从 Y 到 Z 的关系，
    $\mathbf{M}_R = (r_{ij})_{m\times n}$， $\mathbf{M}_S = (s_{jk})_{n\times p}$， $\mathbf{M}_{R\circ S} = (c_{ik})_{m\times p}$，
    则 $\mathbf{M}_{R\circ S} = \mathbf{M}_R * \mathbf{M}_S$， 即

    $$c_{ik} = (r_{i1} \wedge s_{1k}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nk})$$

    •$c_{ik} = 1 \Leftrightarrow x_i(R\circ S)z_k \Leftrightarrow \exists j\,(1 \le j \le n \wedge x_iRy_j \wedge y_jSz_k)$
    $\Leftrightarrow \exists j\,(1 \le j \le n \wedge r_{ij}=1 \wedge s_{jk} = 1)$
    $\Leftrightarrow \exists j\,(1 \le j \le n \wedge (r_{ij} \wedge s_{jk} = 1))$
    $\Leftrightarrow (r_{i1} \wedge s_{1k}) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge s_{nk}) = 1$ 35
  - 若a到b有长度n的路径，则R^n 有a到b的边

- **逆关系** R^{-1}
  - R^{-1} 的关系矩阵是 R 的关系矩阵的转置矩阵
  - 设 R是从X到Y的关系, S是从Y到Z的关系, 则$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$。

- 闭包

  •**定义6.8** 设 R 是集合 X 上的关系。若集合 X 上的关系 R' 满足以下三个条件，则称 R' 为 R 的自反闭包（对称闭包、传递闭包）。
  - (1) R' 是自反的（对称的、传递的）。
  - (2) $R \subseteq R'$
  - (3) 对于 X 上的任何自反的（对称的、传递的）关系 R''， 只要 $R \subseteq R''$， 就有 $R' \subseteq R''$ 。

  • 用 $r(R)$ 表示 R 的自反闭包， $s(R)$ 表示 R 的对称闭包， $t(R)$ 表示 R 的传递闭包。
  •R 的自反闭包（对称闭包、传递闭包）是包含 R 的最小自反（对称、传递）的关系。 41
  - 自反闭包:
    - 设 R 是集合 X 上的关系，则 R 的自反闭包 $r(R) = R\cup I_X$
    - $r(R) = \cap\{S|S是X上的自反关系且R\subseteq S\}$
  - 对称闭包:
    - 设 R 是集合 X 上的关系，则 R 的对称闭包 $s(R) = R\cup R^{-1}$
    - $s(R) = \cap\{S|S是X上的对称关系且R\subseteq S\}$

- 传递闭包：
  - 设 R 是集合 X 上的关系，则 R 的传递闭包 $t(R)=\cup_{n=1}^{\infty}R^n$
  - 设 R 是有 n 个元素的集合 X 上的关系，则 $t(R)=\cup_{i=1}^{n}R^i$
  - $t(R)=\cap\{S|S是X上的传递关系且R\subseteq S\}$

6.3 次序关系

- **偏序关系**：自反+反对称+传递

•常用符号 "≤" 表示偏序.如果x, y∈ P， xRy，*R是偏序，记为x≤y，* 称为 " x小于等于 y"或 "x在y之前 "。若偏序 ≤ 是实数集上的大于等于关系，则 x≤y 表示 x 大于等于 y。

•若 ≤ 是非空集合 P 上的偏序，则有序偶< P, ≤>表示偏序集。

57

全序集

•**定义6.10** 设< P, ≤>是偏序集。若对于任意 x, y∈P，x≤y 或 y≤x 中至少有一个成立，则称 ≤ 为P上的全序或线序，并称 < P, ≤> 为全序集或链。

•对于偏序集< P, ≤>，若两元素 x, y∈P，x≤y 或 y≤x 中至少有一个成立，则称 x 和 y 是可比的。在全序集中，任何两个元素都可比。

•注意：对于非全序集合的偏序集合< P, ≤>， P中任意两个元素 x, y，并非都有x≤y 或 y≤x ，即可能元素x和y没有≤关系，则称x和y是不可比的。

•在偏序集 < ρ({1, 2}), ⊆ > 中，{1}和{2}不可比，所以它不是全序集。

58

对偶的偏序集

•若 R 是非空集合 P 上的偏序，则 R 的逆关系 R^{-1} 也是 P 上的偏序。若用 ≤ 表示 R，则用≥ 表示 R^{-1}，并称偏序集 < P, ≥> 和偏序集 < P, ≤> 是互相对偶的偏序集。

•例如，< **N**, ≤ > 和 < **N**, ≥ > 是互相对偶的偏序集。 < ρ(**N**), ⊆ > 和 < ρ(**N**), ⊇ > 是互相对偶的偏序集。

◆ **严格偏序**：反自反+传递

•**定义6.11** 若 R 是非空集合 P 上的反自反的、传递的关系，则称R 为严格偏序关系或严格偏序，并称 $< P, R >$ 为严格偏序集。

•由 R 的反自反性和传递性可推出反对称性。若 xRy 且 yRx，则由传递性可得出 xRx，这与反自反性矛盾，所以

$$\forall x \forall y\ (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$

成立，R 是反对称的。

偏序集与严格偏序集的关系

•常用符号 “ $<$ ” 表示严格偏序。

•考虑非空集合 P 上的关系 $\leqslant$ 和 $<$ 。

令 $\leqslant\ = <\ \cup\ I_P$ 或 $<\ = \ \leqslant - I_P$

$< P, \leqslant >$ 是偏序集 iff $< P, < >$ 是严格偏序集。

在同一个例子中同时使用符号 $\leqslant$ 和 $<$ 时，意味着 $\leqslant$和 $<$ 有上述关系。如 $\leqslant$ 表示 $\subseteq$ 时，$<$ 就表示 $\subset$ ；如 $\leqslant$ 表示 $\geq$ 时，$<$ 就表示 $>$。

•偏序关系的逆关系仍是偏序关系，严格偏序关系的逆关系仍是严格偏序关系。

•例如，小于等于关系 $\leq$ 的逆关系是大于等于关系 $\geq$，小于关系 $<$ 的逆关系是大于关系 $>$，$\subseteq$ 的逆关系是 $\supseteq$，$\subset$ 的逆关系是 $\supset$。

•今后，在讨论同一问题时，用 $\geqslant$ 表示偏序$\leqslant$的逆关系，用 $>$ 表示 严格偏序 $<$ 的逆关系。

◆ **遮盖**

遮 盖

•设 < P, ≤> 是偏序集，对于任意两个元素x, $y \in P$，若 $x < y$，并且没有 $z \in P$ 使得 $x < z$ 且 $z < y$，则称 y 遮盖 x，有时也称元素x是y的"紧邻前元"。

•在偏序集 <ρ({1, 2, 3}), ⊆ > 中，{1, 2, 3} 遮盖 {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} 这三个元素，∅ 被{1}, {2}, {3} 三者遮盖。

•在偏序集 < **R** , ≤ > 中，每个实数都不被任何实数遮盖。

63

◆ **哈斯图**

•哈斯图是偏序集的简化关系图，画法如下：集合的每一个元素用一个点表示，对于x, $y \in P$, 若 $x < y$，则将 x 画在 y 的下方，并且若 y 遮盖 x，则在 y 与 x 之间连一条无向边。省略了自环（每个顶点上都有）、有向边的方向（从下向上）、某些顶点之间的边（当 $x < z < y$ 时，x 和 y 之间的边，由传递性知，必有这样的边）。

◆ 最大元、最小元、极大元、极小元

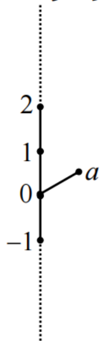
定义6.12设 < A, ≤> 是偏序集，$B \subseteq A$，$b \in B$ 。

1. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $x \leqslant b$，则称 b 为 B 的最大元。
2. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $b \leqslant x$ ，则称 b 为 B 的最小元。
3. 若不存在 $x \in B$ 使得 $b < x$，则称 b 为 B 的极大元。
4. 若不存在 $x \in B$ 使得 $x < b$，则称 b 为 B 的极小元。

68

- B 的最大元：确实比 B 中其它元素都大。
- B 的极大元：不必比 B 中其它元素都大，只需在 B 中没有比它更大元素即可。
- 最大元必是极大元，极大元未必是最大元，若有多个极大元，则这些极大元互相不可比，这时没有最大元。
- B 最多只有一个最大元：若 a 和 b 都是 B 的最大元，则 $a \preccurlyeq b$（因为 b 是最大元），并且 $b \preccurlyeq a$（因为 a 是最大元），所以，
  $a = b$（因为 $\preccurlyeq$ 满足反对称性）。

- 若 B 有唯一的极大元，则该极大元必为最大元，对吗？不对。



设 $A = \mathbf{I} \cup \{a\}$

定义 A 上偏序 $\preccurlyeq$ 如下：

$$x \preccurlyeq y$$

$$\Leftrightarrow (x \in \mathbf{I} \wedge y \in \mathbf{I} \wedge x \le y)$$

$$\vee (x \in \mathbf{I} \wedge x \le 0 \wedge y = a)$$

则 A 有唯一极大元 a，但是没有最大元。

◆ 上界、下界、上确界、下确界

定义6.13 设 $< A, \preccurlyeq >$ 是偏序集，$B \subseteq A$，$b \in A$ 。

1. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $x \preccurlyeq b$，则称 b 为 B 的上界。
2. 若对于每个 $x \in B$ 都有 $b \preccurlyeq x$，则称 b 为 B 的下界。
3. 称 B 的上界集合的最小元为 B 的最小上界，或上确界。
4. 称 B 的下界集合的最大元为 B 的最大下界，或下确界。

- B 的上确界：只要求在 A 中，不要求一定在B 中。
- B 的最大元：要求一定在 B 中。
- 最大元一定是上确界。若上确界在 B 中，则它一定是最大元。
- 最小元一定是下确界。若下确界在 B 中，则它一定是最小元。
- 每个集合最多只有一个上确界。
- 有上界不一定有上确界，可能没有最小的上界。
- 若 B 是有穷非空子集，则必有极大元和极小元。

◆ 良序集

- **定义6.14** 设 $<P, \leqslant>$ 是偏序集。若 P 的每个非空子集都有最小元，则称 $\leqslant$ 为良序，并称 $<P, \leqslant>$ 为良序集。

$\forall A\,(A \subseteq P \land A \neq \varnothing \rightarrow \exists y(y \in A \land \forall x(x \in A \rightarrow y \leqslant x)))$

- 良序集 $<P, \leqslant>$ 必为全序集：任取 $x, y \in P$，$\{x, y\}$是 P 的非空子集，必有最小元。若它的最小元是 x，则 $x \leqslant y$，否则 $y \leqslant x$ 。

- 全序集未必是良序集。如 $<\mathbf{I}, \leq>$ 是全序集，却不是良序集，因为 $\mathbf{I}$ 没有最小元。但是有穷的全序集一定是良序的
- 良序的逆关系未必是良序，如 $<\mathbf{N}, \leq>$ 是良序集，但是 $<\mathbf{N}, \geq>$ 不是良序集，因为 $\mathbf{N}$ 没有关于 $\geq$ 的最小元，即实际上的最大元。
- 设 $A = \{ x \mid x \in \mathbf{R} \land 0 \leq x \leq 1\}$，$<A, \leq>$不是良序集，因为 A 的子集 $B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \land 0 < x < 1\}$ 没有最小元。

良序集的性质

- 在良序集 $<P, \leqslant>$ 中不存在无穷递降链。
- **证明** 若存在无穷递降链 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$，则集合$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 没有最小元，与良序集定义矛盾。
- 良序集的这个性质常用于证明程序的终止性。取一良序集，让每次循环联系该良序集中一元素，并且每循环一次联系的元素总减小，则程序必终止，否则会出现无穷递降链。 作业

6.4 等价关系

- 覆盖、划分

•**定义6.15** 若 A 是非空集合 S 的非空子集的聚合，并且 $\cup A = S$，则称 A 为 S 的覆盖。

•设 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则

$A_1=\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$

$A_2=\{S, \{1, 2\}\}$

$A_3=\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$

都是 S 的覆盖，而$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$不是 S 的覆盖，因为漏掉了 5 和 6 。

•**定义6.16** 设 A 是非空集合 S 的覆盖。若对于A 中任意两不同元素 B 和 C，$B \cap C = \varnothing$，则称 A 为 S 的划分，并称 A 的元素为划分块或块，称 A 的元素个数为划分 A 的秩。

•划分的三个要求：

- 1. 每个块都不是空集（不空）。
- 2. S 的每个元素都在一个块中（不漏）。
- 3. 任何两不同块都没有公共元素（不乱）。

•设 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$是$S$ 的秩为 6 的划分。

$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$是 S 的秩为 3 的划分。

$\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$是 S 的秩为 1 的划分。

$\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$不是 S 的划分。

$\{\varnothing, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$不是 S 的划分。

$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$不是 S 的划分。

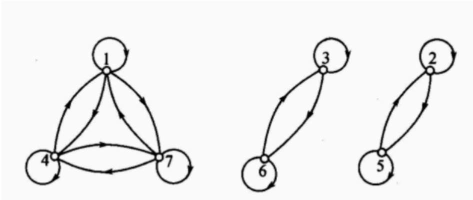
•$\{\{n\} \mid n \in \mathbf{N}\}$是 $\mathbf{N}$ 的秩为无穷的划分。

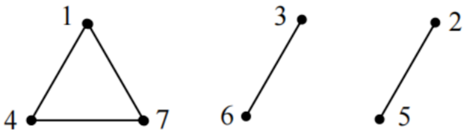
$\{\{2n \mid n \in \mathbf{N}\}, \{2n+1 \mid n \in \mathbf{N}\}\}$是 $\mathbf{N}$ 的秩为 2的划分。

- 等价关系：**自反、对称、传递**
- 等价类 $[x]_R = \{y | y \in X \wedge xRy\}$

- 简图/简化关系图

•**例6.18** 画出{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}上的等价关系 $\equiv_3$ 的关系图和简化关系图如下。





- 等价与划分（商集、$C \times C$ ）

•**定理6.8** 设 R 是非空集合 X 上的等价关系。R 等价类的集合 $\{[x]_R \mid x \in X\}$ 是 X 的划分，并称它为 X 模 R 的商集，记为 X/R，或记为$X\ (mod\ R)$ 。

•例6.20 商集 $X/U_X = \{X\}$， $X/I_X = \{\{x\} \mid x \in X\}$。

•令 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，则商集

$X/\equiv_3 = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$。

•例6.21 $\mathbf{N}/\equiv_6 = \{\{6n + k \mid n \in \mathbf{N}\} \mid k \in \mathbf{N} \wedge 0 \le k \le 5\}$

$=\{\{6n \mid n \in \mathbf{N}\}, \{6n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}, \cdots, \{6n + 5 \mid n \in \mathbf{N}\}\}$

  - 集合X上的等价关系R与集合X的一个划分**一一对应**，集合X的不同划分，对应集合X上的不同的等价关系
  - 整数集I上的以m为模的同余关系是一种重要的等价关系
  - 给定非空集合X上的等价关系R，每一个X上的元素都有等价类，根据对称性和传递性，如果x和y有关系R，则它们生成的等价类是相同的；所有不同等价类构成的集合称为X关于R的商集，即X关于R的商集就是集合X的一个划分，商集中的每一个元素就是集合X的对应划分的一个块。

- A ={1, 2, 3} 上的划分与等价关系对应如下：

{{1, 2, 3}}	U_A
{{1}, {2, 3}}	$\{<2, 3>, <3, 2>\} \cup I_A$
{{2}, {1, 3}}	$\{<1, 3>, <3, 1>\} \cup I_A$
{{3}, {1, 2}}	$\{<1, 2>, <2, 1>\} \cup I_A$
{{1}, {2}, {3}}	I_A

- 由此看来，3 元集上的等价关系有 5 个。

- 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的划分 {{1, 2}, {3}, {4, 5, 6}} 确定的等价关系是
  $rts(\{<1, 2>, <4, 5>, <4, 6>\}) =$
  $\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 2>, <2, 1>, <4, 5>, <5, 4>, <4, 6>, <6, 4>, <5, 6>, <6, 5>\}$,
- 划分{{1, 2, 3, 4, 5, 6}}确定的等价关系是全域关系 U_A，
- 划分{{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}}确定的等价关系是恒等关系 I_A。

第7章 函数

- 第一节后作业：2，$\boxed{6,}$
- 第二节后作业： 8，$\boxed{10,}$
- 第三节后作业： 14，$\boxed{16，17,}$
- 第四节后作业： 23.(2)

1. 判断哪些是函数(2)；求函数(6)
2. 函数复合的计算(8)；函数复合的相关证明(10)
3. 证明单射/满射/双射(14 17)；多少中单射/双射(16)
4. 利用特征函数的性质证明等式

总结

- 1.函数是特殊的关系，要求有序偶第一个元素不同，而且第一元取遍定义域。
- 2.单射指象源不同则象一定不同；满射指集合Y上每一个元素都有象源。

总结

- 从X到Y的函数、从X到Y的偏函数、恒等函数、限制和开拓、象
- 函数的符合、单射、满射、双射、逆函数、特征函数

7.1 基本概念

- **函数**：关系 f 满足单值性
- **从X到Y的函数**
  $f \subseteq X \times Y$
  $dom(f) = X$，即处处有定义
  f 是函数，即单值性
- **象、象源**：对于函数 $f : X \to Y$， y 为在 f 作用下 x 的**象**， x 为 y 的**一个象源。**
- **常用函数**
  - 恒等函数：$I_X(x) = x$
  - 后继函数：$S(x) = x + 1$
  - 地板函数：$f(x) = \lfloor x \rfloor$
  - 天花板函数：$f(x) = \lceil x \rceil$
- **限制与开拓**：设函数 $f : X \to Y$，又$A \subseteq X$，则 $f \cap (A \times Y)$ 是从 A 到 Y 的函数，称为 f **受限制于** A，记为 $f|A$，又称 f 为 $f|A$ 的**开拓。**
  $f|A = \{< x, y > \mid < x, y > \in f \wedge x \in A\}$
  $f|A$ 只是去掉那些以不在 A 中的元素为第一元的有序偶，将定义域改为 A。
- **象**：设函数 $f : X \to Y$，$X' \subseteq X$。称集合 $\{f(x)|x \in X'\}$ 为 X' 在 f 下的**象**，记为 $f(X')$。
  - 显然，整个定义域的象 $f(X)$ 成为函数 f 的象，即 f 的值域，也即：$ran(f) = f(X)$。
  - 由函数 $f : X \to Y$ 派生出函数 $f : \rho(X) \to \rho(Y)$。
- **从X到Y的偏函数(不要求定义域为整个X)**：设 f 是从集合 X 到 Y 的关系。若对每个 $x \in dom(f)$ 存在唯一 $y \in Y$ 使得 $< x, y > \in f$，则称 f 为从 X 到 Y 的**偏函数**，又称为**部分函数**
  - f 是从集合 X 到 Y 的函数当且仅当
    - f 为从 X 到 Y 的偏函数
    - $dom(f) = X$
- **Y上X**：用 Y^X 表示所有从 X 到 Y 的函数组成的集合，即 $Y^X = \{f | f : X \to Y\}$，读作“ Y **上** X ”

- 若 X 和 Y 都是有穷集合，则 $\#(Y^X) = \#Y^{\#X}$
- 设 $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$，$Y = \{y_1, \ldots y_n\}$，则 $f(x_i)$ 可有 n 种选择，所以 $\#(Y^X) = \#Y^{\#X} = n^m$
- 对于任意集合 A，$A^{\varnothing} = \{\varnothing\}$
- 若 A 是非空集合，则 $\varnothing^A = \varnothing$
- 设 A 是全体命题变元组成的集合，则 $\{0,1\}^A$是全体真值赋值组成的集合。

- 函数和一般关系的差别（对于有限集合 X, Y）
  - 集合个数存在差别：从 X 到 Y 的不同关系共有 $2^{\#(X\times Y)}$ 个，从 X 到 Y 的不同函数有 $\#Y^{\#X}$ 个
  - 集合的基数（集合内元素的个数）存在差别：每一个关系的基数可以从 0 一直到 $\#(X \times Y)$，每一个函数的基数都为 $\#X$ 个
  - 集合元素的第一元存在差别：关系的第一元可以相同，函数的第一元一定互不相同。

7.2 函数的复合

- 若 $f : X \to Y$ 且 $g : Y \to Z$，则函数的复合 $g \circ f$ 是一个从 X 到 Z 的函数，即 $g \circ f : X \to Z$，且对所有的 $x \in X$，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 。

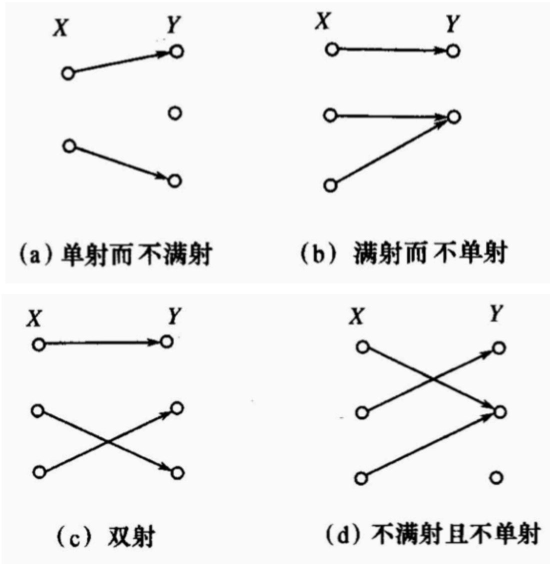
- **f的n次复合** f^n；设 $f : X \to X$，f^n 定义如下：
  - $f^0(x) = x$
  - $f^{n+1} = f \circ f^n$

- **多元函数**：若函数 f 的定义域是 n 个集合的笛卡尔乘积，则称 f 为 n 元函数，并将 $f(< x_1, \ldots, x_n >)$ 记为 $f(x_1, \ldots, x_n)$
  - 若 $f : X \times X \to X$，则称 f 为 X 上的二元运算，常采用中缀记法，将 $f(x, y)$ 记为 xfy，如实数加法 $x + y$。

7.3 特殊性质的函数

- 设函数 $f : X \to Y$
  - **满射**： $ran(f) = Y$
  - **单射**：即只要 $x \neq y$，就有 $f(x) \neq f(y)$
  - **双射/一一对应**：即是单射又是满射

  - 具有上述特性的函数分别称**满射函数**，**单射函数**，**双射函数**。



(a) 单射而不满射 (b) 满射而不单射 (c) 双射 (d) 不满射且不单射

- 对于实函数 f，即 $f: R \to R$，可以通过 f 的图像判断 f 是不是满射、单射、双射
  - f 是满射当且仅当，每条与横轴平行的直线与 f 的图像至少有一个交点。
  - f 是单射当且仅当，每条与横轴平行的直线与 f 的图像至多有一个交点。
  - f 是双射当且仅当，每条与横轴平行的直线与 f 的图像恰好有一个交点。

- 设 f 是从 X 到 Y 的函数，g 是从 Y 到 Z 的函数
  - 若 f 和 g 都是满射，则 $g \circ f$ 是满射。
  - 若 f 和 g 都是单射，则 $g \circ f$ 是单射。
  - 若 f 和 g 都是双射，则 $g \circ f$ 是双射。

- **常值函数**：$f(X) = \{y\}$

- 关于逆函数
  - 若 f 单射，则 f^{-1} 单值。
  - 若 f 满射，则 f^{-1} 处处有定义。
  - **定理7.4**：若 f 双射，则 f^{-1} 也是双射函数。若 f 不双射，则 f^{-1} 不是函数

- **反函数**：设 $f: X \to Y$ 是双射函数，称 f 的逆关系 f^{-1} 为 f 的**反函数**。

- **可逆**：设 $f: X \to Y$，如果存在 $g: Y \to X$ 使得 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为**可逆**的。

- **定理7.5**：若 $f: X \to Y$ 是双射，则 $f^{-1} \circ f = I_X$ 且 $f \circ f^{-1} = I_Y$

- **定理7.6**：设双射 $f: X \to Y$ 及双射 $g: Y \to X$，$g = f^{-1}$ 当且仅当 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$。

•**证明** ($\Rightarrow$) 由定理7.5知道，结论成立。

($\Leftarrow$) 设 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$。又有 $f \circ f^{-1} = I_Y$。

由定理7.2知， $g = g \circ I_Y$ 且 $I_X \circ f^{-1} = f^{-1}$ 。所以，

$g = g \circ I_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = I_X \circ f^{-1} = f^{-1}$

- **定理7.7**：若双射 $f : X \to Y$ 及双射 $g : Y \to Z$，则 $g \circ f$ 也是双射，并且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- 补充：双射集合构成群

  设 F_X 是**所有从 X 到 X 的双射函数组成的集合**
  - 封闭性：对于任意 $f, g \in F_X$，$f \circ g$ 和 $g \circ f$ 都$\in F_X$。（此性质也称为复合运算的闭包性）
  - 结合律：对于任意 $f, g, h \in F_X$，$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
  - 有单位元：$I_X \in F_X$，对于任意 $f \in F_X$，$f \circ I_X = I_X \circ f = f$
  - 有逆元：对于任意 $f \in F_X$，存在反函数 $f^{-1} \in F_X$，$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_X$

    $< F_X, \circ >$ **是群**

7.4 集合的特征函数

- **特征函数** Ψ_A：设 A 是全集 U 的子集，A 的特征函数 $\Psi_A : U \to \{0, 1\}$ 定义为

$$\Psi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{若} x \in A \\ 0 & \text{若} x \notin A \end{cases}$$

- 设A, B 是全集 U 的任意两个子集，则对于所有 $x \in U$，下列关系成立
  - • $A = \varnothing \Leftrightarrow \forall x\ (\Psi_A(x) = 0)$
    • $A = U \Leftrightarrow \forall x\ (\Psi_A(x) = 1)$
    • $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (\Psi_A(x) \le \Psi_B(x))$
    • $A = B \Leftrightarrow \forall x\ (\Psi_A(x) = \Psi_B(x))$
    • $\Psi_{A \cap B}(x) = \Psi_A(x) \wedge \Psi_B(x) = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x)$
    • $\Psi_{A \cup B}(x) = \Psi_A(x) \vee \Psi_B(x)$
    $= \Psi_A(x) + \Psi_B(x) - \Psi_{A \cap B}(x)$
    • $\Psi_{\sim A}(x) = \neg \Psi_A(x) = 1 - \Psi_A(x)$
    • $\Psi_{A - B}(x) = \Psi_{A \cap \sim B}(x) = \Psi_A(x) \cdot (1 - \Psi_B(x))$

- 证明 $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

  - $\Psi_{(A-B)-C}(x)=\Psi_{A-B}(x)\cdot(1-\Psi_C(x))$
    $=\Psi_A(x)\cdot(1-\Psi_B(x))\cdot(1-\Psi_C(x))$
  - $\Psi_{(A-C)-(B-C)}(x)=\Psi_{A-C}(x)\cdot(1-\Psi_{B-C}(x))$
    $=\Psi_A(x)\cdot(1-\Psi_C(x))\cdot(1-\Psi_B(x)\cdot(1-\Psi_C(x)))$
    $=\Psi_A(x)\cdot(1-\Psi_C(x)-\Psi_B(x)\cdot(1-\Psi_C(x))^2)$
    $=\Psi_A(x)\cdot(1-\Psi_C(x)-\Psi_B(x)\cdot(1-\Psi_C(x)))$
    $=\Psi_A(x)\cdot(1-\Psi_C(x))\cdot(1-\Psi_B(x))$

图论

第9章 基本概念

9.1 有向图及无向图

- **有向图** D(digraph)、**无向图** $G(graph)$、**有限图、带权图**

9.2 图的基本结构

- **关联、相邻、邻接**
  - 点和点：邻接
  - 点和边：关联
  - 边和边：相邻

- **简单图**
  - **自环**
  - 在有向图中，始点和终点分别相同的两条弧称为**平行弧**。在无向图中，两个顶点之间的两条边称为**平行边**。
  - 有平行弧的有向图称为**多重弧图**，有平行边的无向图称为**多重边图**。多重弧图和多重边图统称为**多重图**。
  - **无自环和平行弧**（或平行边）的图称为**简单图。**
  - 对于简单有向图 $<V,A>$， A 是 V 上的反自反关系(因为不存在自环)，它的图形表示是 A 的关系图。

- 顶点的次数(degree)
  - **引出弧、引入弧**
  - **引出次数、引入次数**（有向图）
  - **次数**（有向图、无向图）：因为**无向图中与** u **关联的自环的两个端点都是** u**，所以应将自环计为两条边。**
  - **孤立点**：**次数为 0 的顶点**
  - **悬挂点**：**次数为 1 的顶点**

- **悬挂边**：**与悬挂点关联的边**
- **零图**：**每个顶点都是孤立点**的图
- **平凡图**：**1 阶零图**，即仅由一个孤立点构成的图称为平凡图

- **握手定理**
  - 对于顶点集合为$V=\{u_1,...u_n\}$ 的 (n,m) 有向图，
    $\sum_{i=1}^{n} od(u_i)=\sum_{i=1}^{n} id(u_i)=m$
  - 对于顶点集合为$V=\{u_1,...u_n\}$ 的 (n,m) 有向图，$\sum_{i=1}^{n} d(u_i)=2m$
  - 次数为奇数的顶点称为奇顶点，次数为偶数的顶点称为偶顶点。
  - 在任何图中，**奇顶点的个数必为偶数。**

- **正则图**：无向图 G 的**所有顶点的次数都是同一个数** r ，则称 G 为 r 次的正则图。

- **无向完全图**
  任何两个顶点之间都有一条边的**简单**无向图称为完全图，将 n 阶完全图记为 K_n 。K_n 是 $n-1$ 次正则图，它的**边数为** $n(n-1)/2$

- **有向完全图**
  任意两顶点之间都恰有一条弧的**简单**有向图称为有向完全图，也称为竞赛图。在 n 阶有向完全图中，每个顶点的次数都是 $n-1$，**边数为** $n(n-1)/2$ 。

- **图的同构**
  - 无向图：设 $G_1=<V_1,E_1>$ 和 $G_2=<V_2,E_2>$ 是两个无向图。若存在双射 $\tau:V_1\to V_2$ 使得，$(u,v)\in E_1$ 当且仅当 $(\tau(u),\tau(v))\in E_2$ ，并且重数相同，则称 G_1 和 G_2 是同构的。
  - 有向图：设 $D_1=<V_1,A_1>$ 和 $D_2=<V_2,A_2>$ 是两个有向图。若存在双射 $\tau:V_1\to V_2$ 使得，$<u,v>\in A_1$ 当且仅当 $<\tau(u),\tau(v)>\in A_2$ ，并且重数相同，则称 D_1 和 D_2 是同构的
  - 性质（必要但不充分）
    - 同样的顶点数。
    - 同样的边数。
    - 对于任意自然数 k ，次数为 k 的顶点数一样多。
    - 有同样多的自环。

9.3 子图

- **子图/部分图、真子图**

- **补图**：设 $G_1=<V_1,E_1>$ 和 $G_2=<V_2,E_2>$ 是图 $G=<V,E>$ 的两个子图。若 $E_2=E-E_1$，并且
  $V_2=\{v|(v\in V\wedge\exists e(e\in E_2\wedge e与v关联))\vee(v\in V-V_1\wedge v是G中孤立点)\}$
  ，则称 G_2 为 G_1 相对于 G 的补图。

- 无向图
  - **导出子图**：（点不一定全，边也不一定全，但只要两边的点都有就一定有边）设 $G_1 =< V_1, E_1 >$ 是 $G =< V, E >$ 的子图。若 $E_1 = \{e|e \in E \wedge e的端点都在V_1中\}$，则称 G_1 为 G 的由 V_1 导出的子图，或简称 G 的导出子图。
  - **生成子图**：（只要求点是全的，边不一定全）设 $G_1 =< V_1, E_1 >$ 是 $G =< V, E >$ 的子图。若 $V_1 = V$ ，则称 G_1 为 G 的生成子图。
  - **去点运算、去边运算**
  - **加法运算**：设无向图 G 中顶点 u 和 v 不相邻，在 G 中增加边 (u, v) 得到的图记为 $G + (u, v)$。
  - **图的并集**

- 有向图的**导出子图**：（点不一定全，边也不一定全，但只要两边的点都有就一定有边）设 $D_s = < V_s, A_s >$ 是有向图 $D =< V, A >$ 的子图，如果 D_s 的各条弧是由 D 的所有在 V_s 中拥有始点和终点的那些弧所组成，即 $A_s = \{a|a \in A \wedge a的始点和终点都在V_s中\} = \{a|a =< u, v >\in A \wedge u \in V_s$ ，则称 D_s 为顶点集合 V_s 所导出的子图，或简称图 D 的导出子图。

9.4 连通性

9.4.1 有向图 通路 回路 连通

- **通路**：在有向图 $D =< V, A >$ 中，首尾相接的弧的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ 称为通路。

- **长度**

- **简单通路**：无重复边

- **基本通路**：无重复点

- **基本通路必是简单通路，简单通路未必是基本通路。**

- **回路**：（一圈）始点终点相同

- **简单回路**：一圈+无重复边

- **基本回路**：一圈+除了始点终点无重复点

- **无回路图**：没圈

- **半通路**（有边）、**通路**（有同向边）

- **u连接到v、u可达v**（从 u 到 v 有“正向”边）：若存在从顶点 u 到顶点 v 的半通路，则说 u 连接到 v 。若存在从顶点 u 到顶点 v 的通路，则说 u 可以到达 v 。
可达关系是顶点集 V 上的**自反的、传递的**关系。

- 若从顶点 u 可以到达顶点 v，则存在从 u 到 v 的**基本通路。**

- **u 到 v 有通路，则必有基本通路，且最短通路必是基本通路；从而 u 到 v 无基本通路，则必无通路**

- **从u到v的距离**
  + $d(u,v)=0$ 当且仅当 $u=v$
  + （三角不等式）$d(u,w)\leq d(u,v)+d(v,w)$
  + 在 n 阶有向图中，**任何基本通路的长度都不超过 $n-1$，任何基本回路的长度都不超过 n。**

$$d(u,v)=\begin{cases}\text{从}u\text{到}v\text{的最短通路的长度} & if\ \text{从}u\text{可到达}v\\ \infty & else\end{cases}$$

- **强联通的、3度连通的**：（任意两点互相可达）

- **单向连通的、2度连通的**：（任意两点至少一个方向可达）

- **弱连通的、1度连通的**：（任意两点互相连接）

- **不连通的、0度连通的**：（不弱连通）

- **完备通路**：称通过有向图中**所有顶点**的通路为完备通路。

- **完备回路**：称通过有向图中**所有顶点**的回路为完备回路。

- **完备半通路**：称通过有向图中**所有顶点的半通路**为完备半通路。

- 有向图 D 是强连通的当且仅当 D 有一条完备回路。

- 有向图 D 是单向连通的当且仅当 D 有完备通路。

- 有向图 D 是弱连通的当且仅当 D 有完备半通路。

9.4.2 无向图 链 连通

- **链、长度**
- **简单链**：（各边不同）
- **基本链**：（各点不同）
- **闭合链**：（第一个点和最后一个点相同）
- **圈**：（第一个点和最后一个点相同且各边不同）
- **从u到v的距离**
  + （对称性）$d(u,v)=d(v,u)$
  + （三角不等式）$d(u,w)\leq d(u,v)+d(v,w)$
  + $d(u,v)=0$ 当且仅当 $u=v$

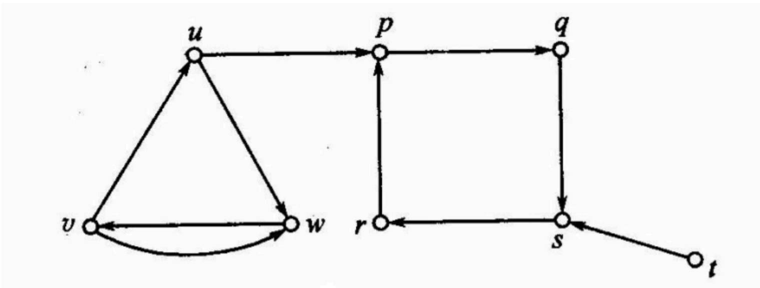
$$d(u,v)=\begin{cases}从u到v的最短通路的长度 & if\ 从u可到达v\\ \infty & else\end{cases}$$

- **连通**：有链
- **图的连通**：若无向图 G 中**任何两顶点都是连通的**，则称 G 是连通的，否则说 G 是不连通的。
- **连通分支**：无向图 G 的顶点之间的连通关系是等价关系。每个等价类是顶点集的一个非空子集。由**等价类导出的子图**称为 G 的连通分支，等价类的数目即连通分支的数目。图 G 是连通的当且仅当 G 只有一个连通分支。
- **割点**：设 v 是连通无向图 G 的顶点，如果从 G 中**去掉 v 和与它关联的边得到的无向图 $G-v$ 是不连通的**，则称 v 为 G 的割点。
- **割边/桥**：设 e 是连通无向图 G 的边，如果从 G 中**去掉 e 得到的无向图 $G-e$ 是不连通的**，则称 e 为 G 的割边或桥。

9.5 顶点基和强分图

9.5.1 顶点基

- 设有向图 $D=<V,A>$，$B\subseteq V$，$v\in V$。若从 B 中某个顶点可以到达 v，则称从 B 可以到达 v。
- **顶点基**：（**可达所有点且极小**）设有向图 $D=<V,A>$，$B\subseteq V$。若从 B 可以到达 V 中每个顶点（相当于 B 可以到达 $V-B$ 中的每个顶点，因为 B 中的点可以到达自身），并且 B 的每个真子集都不能到达 V 中每个顶点，则称 B 为 D 的**顶点基**。



•在上面的有向图中，*u*, *v*, *w* 三顶点互相可以到达，并且其余顶点都不能到达它们，所以任何顶点基中恰好包含它们当中之一；别的顶点都不能到达顶点 *t*，所以任何顶点基中必包含 *t*。而从 *t* 可以到达 *p*, *q*, *r*, *s* 四顶点，所以任何顶点基中必不包含这四点。共有以下三个顶点基：

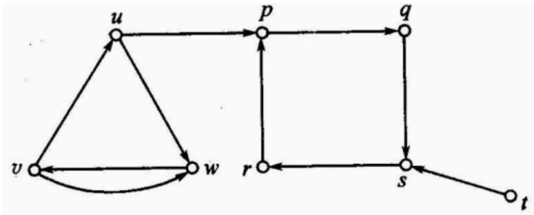
{*u*, *t*}，{*v*, *t*}，{*w*, *t*}

9.5.2 强分图

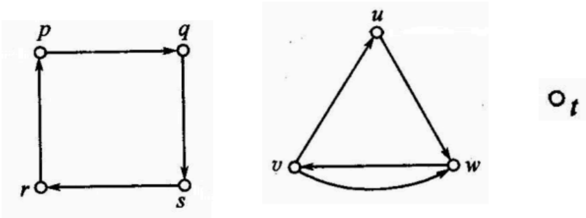
- **强分图**：（**极大的强连通子图**）设 D 是有向图。若 D' 是 D 的强（单向、弱）连通子图，并且对于 D 的任意强（单向、弱）连通子图 D''，若 $D'\subseteq D''$，则 $D'=D''$；那么就称 D' 为 D 的强（单向、弱）连通分图，或**强（单向、弱）分图**。
- 定理9.8：在有向图 D 中，**每个顶点在唯一的强分图中，每条弧至多在一个强分图中**。

- 即在一个有向图中**没有不在强分图中的顶点**；任意两个强分图都**没有公共顶点**
- **若弧 a 在两个强分图中，则它的端点在两个强分图中。**

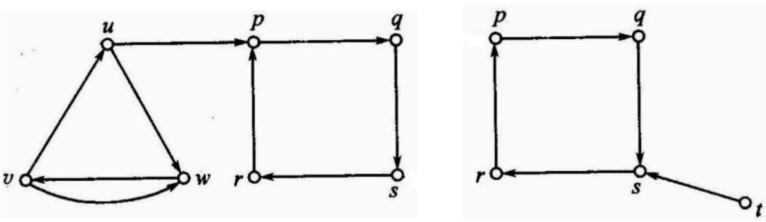
•有向图 *D*



•*D* 的三个强分图



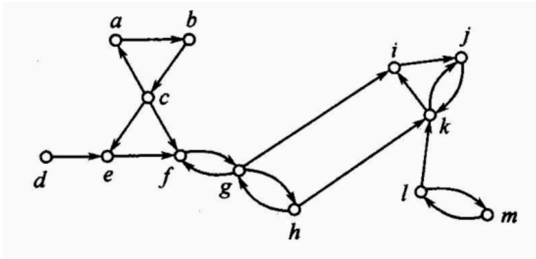
•*D* 的两个单向分图



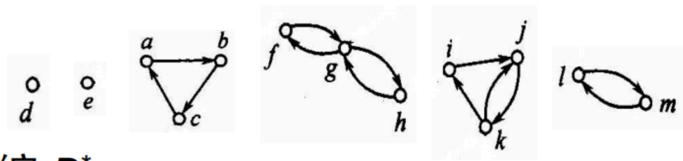
9.5.3 压缩

- **压缩**：（**强分图之间的弧组成的图**）设有向图 $D=<V,A>$ 的强分图的顶点集为 $K_1,...,K_p$，有向图 $D^*=<V^*,A^*>$ 定义为 $V*=K1,...,Kp$，$<K_i,K_j>\in A^* \iff i\neq j\wedge\exists u\exists v(u\in K_i\wedge v\in K_j\wedge<u,v>\in A)$

• 有向图 *D*

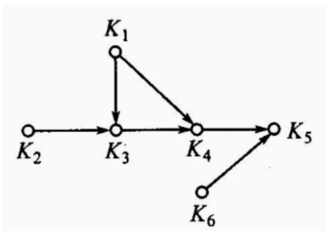


• *D* 的强分图

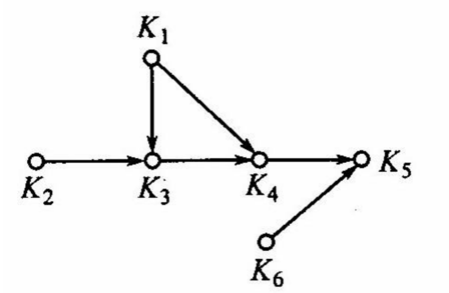


•*D* 的压缩 D^*

$K_1=\{a, b, c\}$, $K_2=\{d\}$,
$K_3=\{e\}$, $K_4=\{f, g, h\}$,
$K_5=\{i, j, k\}$, $K_6=\{l, m\}$

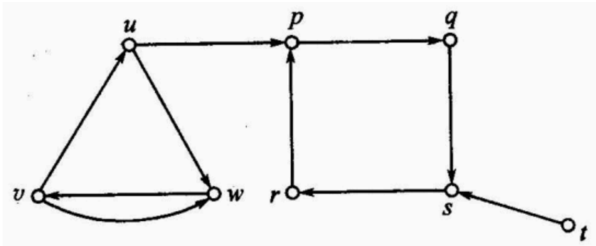


- 定理9.9：有向图 $D=<V,A>$ 的压缩 D^* 是**无回路图。**
- 定理9.10：无回路有向图（如压缩）$D=<V,A>$ 有**唯一的顶点基**，它由**所有引入次数为 0 的顶点**组成。

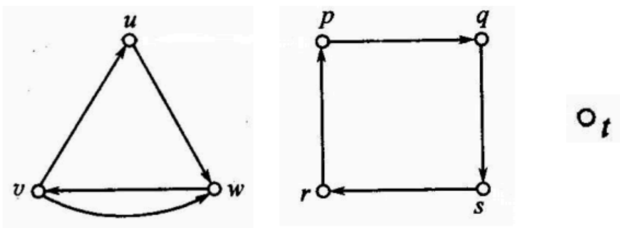


- 定理9.11：（压缩的顶点基中每个元素取出一个顶点可以构成原图的顶点基）设 D^* 是有向图 $D=<V,A>$ 的压缩，B^* 是 D^* 的唯一顶点基，则从 B^* 的**每个元素中取出一个顶点构成的集合** B **是** D **的顶点基**，并且 D 的**每个顶点基都可以这样得到。**
- 定理9.12：有向图 D 的**每个顶点基都包含同样数目的顶点。**

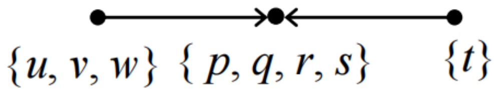
有向图 *D*



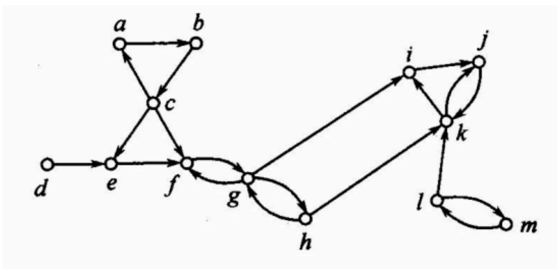
D 的三个强分图

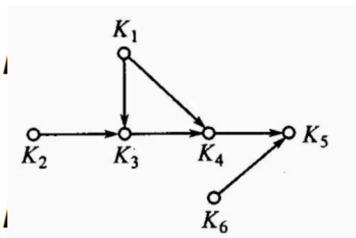


D 的压缩 D^*



- *D* 的顶点基：{*u*, *t*}，{*v*, *t*}，{*w*, *t*}





{*a*, *d*, *l*}, {*a*, *d*, *m*}, {*b*, *d*, *l*}, {*b*, *d*, *m*}, {*c*, *d*, *l*}, {*c*, *d*, *m*}。

$K_1=\{a, b, c\}$, $K_2=\{d\}$, $K_3=\{e\}$, $K_4=\{f, g, h\}$, $K_5=\{i, j, k\}$, $K_6=\{l, m\}$

9.6 总结

- 根据图的结构特点，定义出多种图的名称
  无向图、有向图、带权图、邻接、关联、相邻、自环、平行弧/边、多重图、简单图、次数、n阶图、零图、平凡图、完全图
- 对于图和图之间的比较，定义出多种图的名称
  补图、正则图、同构图、子图(生成子图和导出子图)、图的并集
- 考察不相邻节点之间的关系，定义出新的概念
  通路及回路、简单通路及回路、基本通路及回路、可达、半通路、连接到、强(单向/弱)连通、完备通路(回路/半通路)、链、简单链、基本链、闭合链、圈、连通分支
- 根据连通图中特殊点和边的特点，定义出新的概念
  割点、割边/桥、顶点基、强分图(单向分图/弱分图)、压缩

第10章 通路问题

10.1 最短通路

- **弧** a **的长度** $l(a)$、**通路** P **的长度** $l(P)$、从 v 到 w 的**最短通路**、从 v 到 w 的**距离** $d(v,w)$

10.2 关键通路

- **工序流线图**是满足以下条件的简单带权有向图：
  - 没有回路。
  - 有唯一的引入次数为 0 的顶点，称其为**发点**。
  - 有唯一的引出次数为 0 的顶点，称其为**收点**。
  - 每个顶点都在某条从发点到收点的通路上。
  - 每条弧的权是非负实数。

- **最早完成时间**：在工序流线图中，从发点 u_1 到事件 u_j 的最长通路的长度称为事件 u_j 的最早完成时间，记为 $TE(u_j)$ 。

求最早完成时间的算法

•给定工序流线图 $D = \langle V, A \rangle$， $v \in V$，定义 v 的后继点集 $\Gamma^+(v)$ 和前驱点集 $\Gamma^-(v)$ 如下：

$$\Gamma^+(v) = \{u \mid u \in V \wedge \langle v, u \rangle \in A\}$$
$$\Gamma^-(v) = \{u \mid u \in V \wedge \langle u, v \rangle \in A\}$$

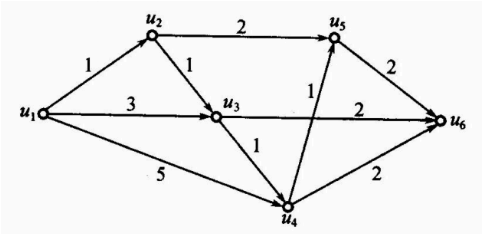
•显然，发点 u_1 的最早完成时间 $TE(u_1) = 0$。
然后求只以 u_1 为前驱点的顶点的最早完成时间。

•一般说来，若已求出顶点 v 的所有前驱点的最早完成时间，即可求出 v 的最早完成时间

$$TE(v) = \max\{ TE(u) + l(u, v) \mid u \in \Gamma^-(v)\}$$

直至求出收点的最早完成时间为止。

- 显然，对于收点u_n，其最早完成时间 $TE(u_n)$ 则是整个计划的最早完成时间。最早完成时间$TE(u_j)$的含义是：完成事件u_j至少需要$TE(u_j)$这么多时间，如果减少时间，以u_j为结束时刻的某些作业就无法完成。



$TE(u_1) = 0$， $TE(u_2) = 0 + 1 = 1$，
$TE(u_3) = \max\{0 + 3, 1 + 1\} = 3$，
$TE(u_4) = \max\{0 + 5, 3 + 1\} = 5$，
$TE(u_5) = \max\{1 + 2, 5 + 1\} = 6$，
$TE(u_6) = \max\{6 + 2, 3 + 2, 5 + 2\} = 8$。

◆ **最迟完成时间**：给定工序流线图，在保证收点 u_n 的最早完成时间不增加的前提下，自发点 u_1 最迟到达事件 u_j 的时间称为 u_j 的最迟完成时间，记为 $TL(u_j)$ 。

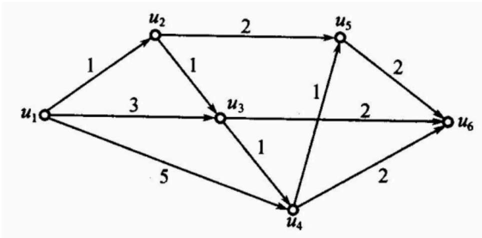
- 设 P 是从 u_j 到收点 u_n 的最长通路。若到达 u_j 的时间为$TE(u_n) - l(P)$，则整个工程的完成时间仍然是$TE(u_n)$ 。
- 若到达 u_j 的时间 m 迟于$TE(u_n) - l(P)$，也就是说，$m > TE(u_n) - l(P)$，则整个工程的完成时间 $m + l(P) > TE(u_n)$ 。
- 所以，u_j 的最迟完成时间 $TL(u_j) = TE(u_n) - l(P)$。

求最迟完成时间的算法

- 显然，收点 u_n 的最迟完成时间 $TL(u_n) = TE(u_n)$ 。然后求只以 u_n 为后继点的顶点的最迟完成时间。
- 一般说来，若已求出顶点 v 的所有后继点的最迟完成时间，即可求出 v 的最迟完成时间

$$TL(v) = \min\{TL(u) - l(v, u) \mid u \in \Gamma^+(v)\}$$

直至求出发点的最迟完成时间为止。
- 即：最早求最大，最迟求最小



$TL(u_6) = TE(u_6) = 8$,

$TL(u_5) = 8 - 2 = 6$,

$TL(u_4) = \min\{6 - 1, 8 - 2\} = 5$,

$TL(u_3) = \min\{8 - 2, 5 - 1\} = 4$,

$TL(u_2) = \min\{6 - 2, 4 - 1\} = 3$,

$TL(u_1) = \min\{3 - 1, 4 - 3, 5 - 5\} = 0$。

- **关键通路**：在工序流线图中，从发点到收点的最长通路称为关键通路。
- **事件 u_j 在某条关键通路上当且仅当它的最早完成时间和最迟完成时间相等。**
- **缓冲时间**：给定工序流线图 $D = < V, A >$，$v \in V$，定义 v 的缓冲时间 $TS(v) = TL(v) - TE(v)$。
  - 事件 v 的发生可以比预定的最早完成时间推迟缓冲时间 $TS(v)$，而不会影响整个工程的进度。
  - 关键通路上的所有事件的缓冲时间都是0，即它们都要准时发生，不能推迟，并且关键通路上的工序都要按时完成，不能推迟。

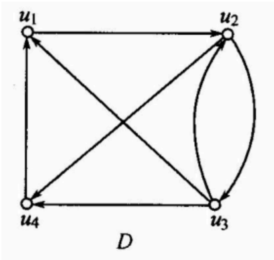
第11章 图的矩阵表示

11.1 邻接矩阵

11.1.1 有向图的邻接矩阵

- $$od(u_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}, \quad id(u_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$$
- 对于简单有向图 $D = < V, A >$ 来说，**邻接矩阵** M 为 A 的**关系矩阵**。
因为简单图没有自环，所以邻接矩阵 M 的主对角线全为 0。

- **定理11.1**：设 $D=<V,A>$ 是有向图，$V=\{u_1,...,u_n\}$，$M=(m_{ij})_{n\times n}$ 是 D 的邻接矩阵，$M^l=(m_{ij}^{(l)})_{n\times n}$，则 $m_{ij}^{(l)}$ 是从顶点 u_i 到顶点 u_j 的长度为 l 的通路的条数。
  - $d(u_i,u_j)$ 是 u_i 到 u_j 的**最短通路**的长度，所以其是使 M^l 中第 i 行第 j 列的元素有非零值的最小正整数 $l(1\le l\le n)$
  - 对于 $i\neq j$ 和 $l=1,2,...,n-1$，如果 M^l 中第 i 行第 j 列的元素均为0，又结合定理9.4（任何基本通路的长度不超过n-1），则可得从 u_i 到 u_j **不存在任何通路**，因而**属于不同的强分图。**



$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{M}^3=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{M}^4=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{pmatrix}$$

由于 $m_{43}^{(1)}=m_{43}^{(2)}=0$，$m_{43}^{(3)}\ge 1$，所以 $d(u_4,u_3)=3$。
由于 $m_{13}^{(1)}=0$，$m_{13}^{(2)}\ge 1$，所以 $d(u_1,u_3)=2$。
该有向图是强连通的。

11.1.2 无向图的邻接矩阵

- $d(u_i)=\sum_{j=1}^{n}m_{ij}=\sum_{j=1}^{n}m_{ji}$

- 特别地，对于简单无向图来说
  简单无向图G 的邻接矩阵M 是**对称矩阵**
  主对角线元素都是0

- **定理11.2**：设 $G=<V,E>$ 是无向图，$V=\{u_1,...,u_n\}$，$M=(m_{ij})_{n\times n}$ 是 G 的邻接矩阵，$M^l=(m_{ij}^{(l)})_{n\times n}$，则 $m_{ij}^{(l)}$ 是从顶点 u_i 到顶点 u_j 的长度为 l 的链的条数。

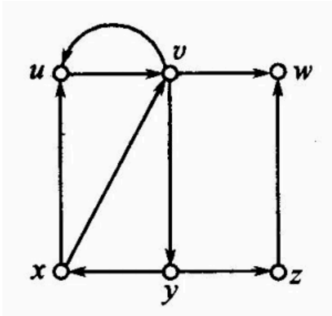
11.2 有向图的可达性矩阵

- **可达性矩阵**：设有向图 $D=<V,A>$，$V=\{u_1,...,u_n\}$，D 的可达性矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$定义为

$$r_{ij}\begin{cases}1 & 若u_i可达u_j \\ 0 & 否则\end{cases}$$

> 因为每个顶点可以到达自己，所以任何有向图的可达性矩阵的**主对角线元素全为1**
> **设 R 和 M 分别是 n 阶有向图 D 的可达性矩阵和邻接矩阵，则$R= B(I+ M+ M^2+ …+ M^{n-1}) = B((I+ M)^{n-1})$，其中 I 是 n 阶单位矩阵。**

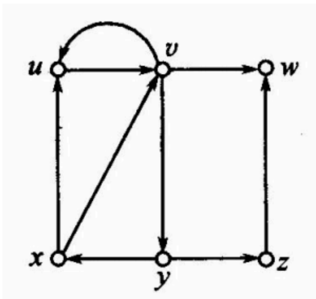
- **布尔函数**
- 可达矩阵的应用：求**包含指定顶点的强分图**以及此强分图中**所含顶点的数目。**
- **元素积**：设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 且 $B=(b_{ij})_{n\times m}$，称 $A\times B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times m}$ 为 A 和 B 的元素积。
- **定理11.4**：设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是有向图 D 的可达性矩阵，并设 $R^2=(s_{ij})_{n\times n}$，则
  - 由 $R\times R^T$ 的第 i 行（列）中等于 1 的元素对应的顶点**导出的子图是** u_i**所在的强分图。**
    解释：R 的 $r_{ij}=1$ 表示 i 可达 j，R^T 的 $r_{ij}=1$ 表示 j 可达 i，故 $R\times R^T$ 中 $r_{ij}=1$ 的表示 i j 互达
  - u_i **所在的强分图有** s_{ii}**个顶点。**
    $s_{ii}=r_{i1}r_{1i}+...+r_{in}r_{ni}=$ 与 u_i 互达的顶点数



$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^T=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1&1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^T=\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

- $\{u, v, x, y\}$, $\{w\}$, $\{z\}$ 各导出一个强分图。



$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}4&4&6&4&4&5\\4&4&6&4&4&5\\0&0&1&0&0&0\\4&4&6&4&4&5\\4&4&6&4&4&5\\0&0&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

- $\{u, v, x, y\}$, $\{w\}$, $\{z\}$ 各导出一个强分图。

- 设 R 和 M 分别是 n 阶有向图 D 的可达性矩阵和邻接矩阵，则
  - D 是**强连通**的当且仅当 R 的元素全为 1。
  - D 是**单向连通**的当且仅当 $B(R+R^T)$ 的元素全为 1。
  - D 是**弱连通**的当且仅当 $B(I+N+...+N^{n-1})$ 的元素全为 1，其中 $N=B(M+M^T)$。
  - D 是**无回路**的当且仅当 $M+...+M^n$ 的主对角线元素全为 0。

11.3 关联矩阵(Incidence Matrix)

11.3.1 有向图的关联矩阵

- **关联矩阵**：设无自环有向图 $D=<V,A>$ 不是零图，其中 $V=\{u_1,\ldots,u_n\}$，$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$，D 的关联矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times m}$定义为

$$b_{ij}\begin{cases}1 & 若u_i是弧a_j的始点\\ -1 & 若u_i是弧a_j的终点\\ 0 & 若u_i不是弧a_j的端点\end{cases}$$

```
矩阵 $B$ 每列元素之和都是0。
若 $B$ 的第 i 列与第 j 列相同，则 $a_i$ 和 $a_j$ 是平行弧。
$B$ 的第 i 行中 1 的个数 = 顶点 $u_i$ 的**出度**，
$B$ 的第 i 行中 -1 的个数 = 顶点 $u_i$ 的**入度**。
![[Pasted image 20241114165653.png|500]]
```

11.3.2 无向图的关联矩阵

- **关联矩阵**：设无自环有向图 $D=<V,A>$ 不是零图，其中 $V=\{u_1,\ldots,u_n\}$，$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$，D 的关联矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times m}$定义为

$$b_{ij}=e_j与u_i的关联次数$$

```
矩阵 $B$ 每列元素之和都是 2
若 $B$ 的第 i 行第 j 列是 2，则 $e_{j}$ 是 $u_{i}$ 上的自环
若 $B$ 的第 i 列与第 j 列相同，则 $e_i$ 和 $e_j$ 是平行弧
$B$ 的第 i 行元素之和 = 顶点 $u_i$ 的**度**
![[Pasted image 20241114170137.png|500]]
```

第12章 树

12.1 树的一般定义

- **树**：连通且无圈的无向图称为**树**。

- **林**：无圈的无向图称为**林**。林是每个连通分支都是树的无向图。

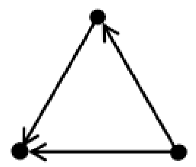
- **树的等价定义**
设 T 是 (n,m) 无向图。以下说法是等价的。
  - T 连通且无圈。
  - T 无自环，并且每对顶点之间有唯一基本链。
  - T 连通，在 T 中加一边仅有一个圈。
  - T 连通，去掉任何一边就不连通了。
  - T 连通，并且 $m=n-1$。
  - T 无圈，并且 $m=n-1$。

- **树叶、分支顶点**

- **定理12.3**：非平凡树中至少有两片树叶

12.2 根数与有序树

- **有向树**：将一个树的边**加上任意的方向**，就得到**有向树。**任何有向树都是**弱连通的无回路**有向图，但是弱连通的无回路有向图未必是有向树（如下图）。



- **树根、根数**：若有向树 T 有一个顶点的引入次数为0，其余顶点的引入次数都为 1，则称 T 为**根树。**称根树中引入次数为 0 的顶点为**树根。**

- **树叶、分支顶点、级**：从树根到一个顶点的通路的长度称为该顶点的**级。**

- **树高**：根树中顶点的级的最大值称为**树高**

- **有序树**：称为顶点或弧指定了次序的根树是**有序树。**若从顶点 u 可以到达 v， 则称 v 为 u 的**后裔**， u 为 v 的**祖先。**若 < u, v > 是弧，则称 v 为 u 的**儿子**，u为 v 的**父亲**，同一顶点的儿子互为**兄弟。**

12.3 二元树

- **m元树、完全m元树、位置m元树**
  - 每个顶点的引出次数都**小于等于 m** 的根树称为 **m 元树。**
  - 每个顶点的引出次数都**等于 m 或 0** 的根树称为**完全 m 元树。**
  - 若为 m 元树 T 中每个顶点的各儿子规定了**位置**，则称 T 为**位置 m 元树。**

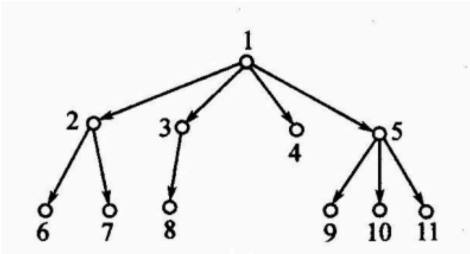
有序树转换为位置二元树的算法

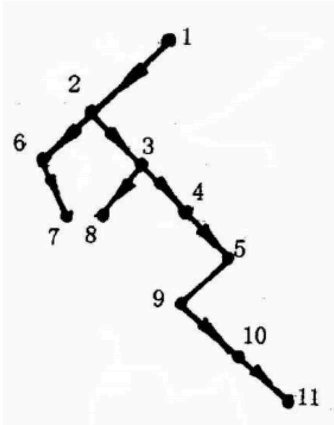
- 若 u 是原来有序树的树根，则它仍然是转换后的位置二元树的**树根。**

- 在原来有序树中，
  + 若顶点 u 是 v 的**大儿子**，则在转换后的位置二元树中，u 是 v 的**左儿子**；

+ 若顶点 u 是 v 的**大兄弟**，则在转换后的位置二元树中，u 是 v 的**右儿子**。

- 有序树 位置二元树





- 每个弱分图都是有序树，并且为各有序树规定了顺序的有向图称为**有序林**。如果称排在前面的有序树的树根是排在后面的有序树的树根的**哥哥**，并规定转换后的位置二元树的树根是有序林中**第一个有序树的树根**，则可按照上面的算法将有序林转换为位置二元树。

前缀码

- 若存在非空符号串 γ 使得 $\alpha = \beta\gamma$，则称符号串 β 是符号串 α 的**前缀**。设 A 是字母表 {0, 1} 上的语言，若不存在 $\alpha, \beta \in$A 使得 β 是 α 的前缀，则称 A为**二元前缀码。**
  例如，{00, 10, 11} 是二元前缀码， {1, 00, 10, 11} 不是二元前缀码
- 二元树和二元前缀码
  让位置二元树中的每个顶点对应一个 {0, 1} 上的字，令所有树叶对应的字的集合为该位置**二元树产生的二元前缀码。**
  - 顶点对应的字归纳定义如下：
    - 树根对应空字 ϵ 。
    - 若顶点 u 对应字 α，则 u 的左儿子对应 $\alpha 0$， u 的右儿子对应 $\alpha 1$。
  - 每个顶点对应**字的长度等于该顶点的级**。从顶点 u 可以到达另一顶点 v 当且仅当 u 对应的字是 v 对应的字的前缀。因为从一个树叶不可能到达另一树叶，所以**位置二元树产生的语言是二元前缀码**。反之，**任意二元前缀码都可由一个位置二元树产生。**

最优二元树

- **带权二元树** T **的权** $m(T)$ 、**最优二元树。**
- 设 $t \geq 2, P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_t$，则存在一个带权 $P_1, \ldots, P_t$ 的最优二元树使得**权为** P_1 **和** P_2 **的树叶是兄弟。**
- 设 $t \geq 2, P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_t$，$T$ 是带权 $P_1 + P_2, P_3, \ldots, P_t$ 的二元树。为 T 中带权 $P_1 + P_2$ 的树叶增加两个分别带权 P_1, P_2 的儿子得到带权 $P_1, \ldots, P_t$ 的二元树 T'。那么， T 是带权 $P_1 + P_2, P_3, \ldots, P_t$ 的最优二元树当且仅当 T' 是带权 $P_1, P_2, \ldots, P_t$ 的最优二元树

◆ **Huffman算法**

1. 令 $S = \{ P_1, P_2, \cdots, P_t \}$，画顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_t$，使之分别带权 $P_1, P_2, \cdots, P_t$。
2. 若 S 是单元集则终止。
3. 从 S 中取出两个最小元 x 和 y，设带权 x 和 y 的顶点分别是 u 和 v，画 u 和 v 的父顶点 w，并使 w 带权 $x + y$。
4. $S \leftarrow (S - \{x, y\}) \cup \{x + y\}$，转 2。

- 最优二元树的权为树根和各分支顶点的权之和。

12.4 生成树

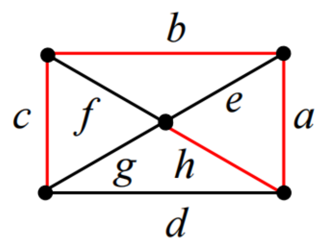
◆ 若无向图 G 的生成子图 T 是树，则称 T 为 G 的**生成树。**

◆ 设 T 是无向图 G 的生成树。称 T 中的边为 T 的**树枝**，称 G 的不在 T 中的边为 T 的**弦**，弦的集合称为 T 的**补。**(n, m) 无向图 G 的任何生成树有 **n − 1 个树枝，m − n + 1 条弦。**当然， G 的某条边可能是这棵生成树的树枝，却是另一棵生成树的弦

◆ **定理12.7**：无向图 G 有生成树当且仅当它是连通的。

◆ **基本圈、基本圈组**：(n, m) 无向图 G 的生成树 T 有 m − n + 1 条弦。任取 T 的一条弦 e ，T + e 有唯一的圈，它由**树枝和弦e** 组成，称这样的圈为对应于弦 e 的**基本圈。**由这 m− n + 1 个基本圈组成的集合称为关于生成树 T 的**基本圈组。**

本圈组。在下图中，树枝为 h, a, b, c；



基本圈组为

$\{ (h, a, e), (h, a, b, f),$

$(h, a, b, c, g), (a, b, c, d) \}$

最小生成树

Kruskal（克鲁斯卡尔）算法（避圈法）

- 求 n 阶带权简单连通无向图 $G = <V, E>$ 的最小生成树，其中 $n > 1$。

1.选取权最小的边 e_1，$i \leftarrow 1$；
2.若 $i = n - 1$ 则终止；
3.选取 $E - \{e_1, \cdots, e_i\}$ 中使得 $\{e_1, \cdots, e_i, e_{i+1}\}$ 中无圈的权最小的边 e_{i+1}；
4. $i \leftarrow i + 1$，转 2。

$e_1, \cdots, e_{n-1}$ 构成 G 的一个最小生成树。

12.5 割集

- **割集(最小的 能把图分成两块的边的集合)**：设连通无向图 $G =< V, E >$，$E' \subseteq E$。若 $G - E'$ 不连通，即 G 分离成为两个连通分支，并且对于任意 $E'' \subset E'$，$G - E''$ 仍然连通，则称 E' 为 G 的割集。
割集的等价定义：E' 是连通无向图 $G =< V, E >$ 的割集当且仅当存在 V 的划分 $\{V_1, V_2\}$ 使得 $E' = \{(u, v)|(u, v) \in E \wedge u \in V_1 \wedge v \in V_2\}$，并且 V_1 导出的子图和 V_2 导出的子图都是连通的。

- **桥**：e 是 G 中的**桥**当且仅当 $\{e\}$ 是 G 的割集。

- **基本割集(一个树枝一堆弦)、基本割集组**：设 T 是 (n, m) 连通无向图 G 的生成树。因为从 G 中去掉所有弦后仍连通，所以**每个割集中必有树枝**。因为从 G 中去掉所有弦和一个树枝后不再连通，所以，对于每个树枝都存在由它和若干弦组成的割集。我们称**只包含一个树枝**的割集为**基本割集**。显然，有 n −1个基本割集。称由这 n −1 个基本割集组成的集合为关于生成树 T 的**基本割集组**。

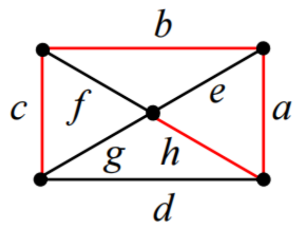
- **定理12.8**：每个圈与任何生成树的补(即弦的集合)至少有一条公共边，即**每个圈中都包含弦**。

- **定理12.9**：每个割集与任何生成树至少有一条公共边，即**每个割集中都包含树枝**。

- **定理12.10**：任何圈和任何割集都有**偶数条**（包含零条）公共边。

- **定理12.11**：给定图 G 的生成树 T。设 $D = \{e_1, \ldots, e_k\}$ 是基本割集，其中 e_1 是树枝，$e_2, \ldots, e_k$ 是弦，则 e_1 **包含在对应于** $e_2, \ldots, e_k$ **的基本圈(一个弦一堆树枝)里，但不包含在任何其它基本圈里。**

- **定理12.12**：给定图 G 的生成树 T。设 $C = (e_1, \ldots, e_k)$ 是基本圈，其中 e_1 是弦，$e_2, \ldots, e_k$ 是树枝，则 e_1 **包含在对应于** $e_2, \ldots, e_k$ **的基本割集(一个树枝一堆弦)中，但不包含在任何其它基本割集中。**



在左图中，树枝为

h, *a*, *b*, *c*；

基本圈组为

{ (*h*, *a*, *e*) , (*h*, *a*, *b*, *f*) ,

(*h*, *a*, *b*, *c*, *g*) , (*a*, *b*, *c*, *d*)}

- 基本割集组为

{{*c*, *g*, *d*}, {*b*, *f*, *g*, *d*}, {*a*, *e*, *f*, *g*, *d*}, {*h*, *e*, *g*, *f* }}

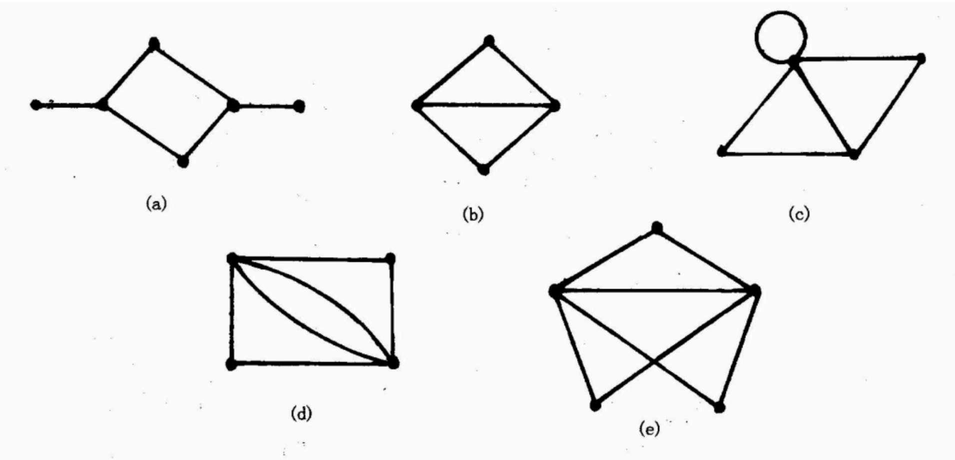
•显然：*c*只包含在对应于*g*或者*d*的基本圈(*h*, *a*, *b*, *c*, *g*)或(*a*, *b*, *c*, *d*)中； *e*只包含在对应于*h*或者*a*的基本割集{*h*, *e*, *g*, *f* }或{*a*, *e*, *f*, *g*, *d*}中

第13章 穿程问题

13.1 欧拉图

无向图中的欧拉图

- **欧拉圈、欧拉图**：称穿过无向图中**每条边**的**简单闭合**链为**欧拉圈**。有欧拉圈的图称为**欧拉图**。
- 若无向图 G 中每个顶点的次数大于1，则在 G 中存在圈。
- **定理13.1**：连通无向图 G 是**欧拉图**当且仅当 G 的**每个顶点都是偶顶点**。
- **欧拉链**：称穿过无向图 G 中**每条边**的**简单非闭合**链为**欧拉链**。(注意：欧拉链一般不是基本链)
- **定理13.2**：在连通无向图 G 中存在连接顶点 u 和 v 的**欧拉链**当且仅当**只有** u **和** v **是奇顶点**。



- 图 (a) 有 4 个奇顶点，既没有欧拉圈，也没有欧拉链。
- 图 (b) 和 (c) 有欧拉链，不是欧拉图。
- 图 (d) 和 (e) 只有偶顶点，有欧拉圈，是欧拉图。

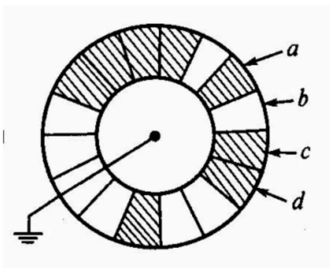
一笔画问题

从无向图的一个顶点出发，笔不离纸，不重复地画出该图的所有边。

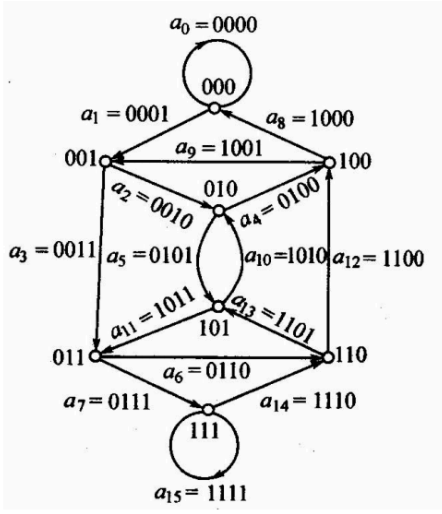
- 若连通无向图**只有偶顶点**，则从**任意顶点**出发，可沿欧拉圈不重复地一笔画出所有边，并回到出发点。
- 若连通无向图**只有两个奇顶点**，则从**一个奇顶点**出发，可沿欧拉链不重复地一笔画出所有边，并**到达另一个奇顶点**。
- 若连通无向图有**多于两个奇顶点**，则**不能**不重复地画出该图的所有边。

有向图中的欧拉图

- **欧拉回路、欧拉图**：称穿过有向图中**每条弧**的**简单**回路为**欧拉回路**。有欧拉回路的有向图称为**欧拉图**。
- **欧拉通路**：称穿过有向图中**每条弧且非闭合**的**简单通路**为**欧拉通路**。
- 强连通有向图 D 是**欧拉图**当且仅当 D 中每个顶点的**引入次数与引出次数相同**。
- 单向连通有向图 D 有从顶点 u 到 v 的**欧拉通路**当且仅当 u **的引出次数比引入次数大1**，v **的引入次数比引出次数大1**，D 中**其它顶点的引入次数与引出次数相同**。



- 旋转鼓的表面等分成 16 块扇形区域，每块扇形用导电材料（阴影区域）或不导电材料（空白区域）制成。当每个扇区转到与终端 *a*, *b*, *c*, *d* 之一接触时，便给出 1（导电扇区）或 0（不导电扇区）转鼓在图中的位置，四个终端给出信息 1011，如果鼓按顺时针方向转过一个扇区，信息将变为 0101。
- 怎样安排旋转鼓上的 16 个扇区的导电材料与不导电材料，才能使旋转鼓转过 16 个扇区，四个终端能给出所有 16 个不同的四位二进制信息？



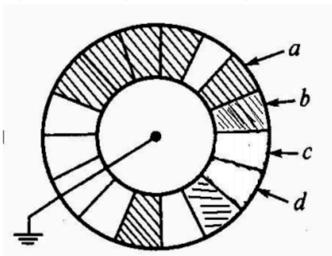
•我们构造有向图如下：顶点分别表示从 000 到 111的八个三位二进制数；当一个顶点的后两位数字与另一个顶点的前两位数字相同时，即当一个顶点为 *abc*，另一个顶点为*bcd* 时，便从顶点 *abc* 到顶点 *bcd* 画一条弧，并令该弧表示四位二进制数 *abcd*，这样，任意通路中前一条弧的后三位数字与后一条弧的前三位数字相同。在顶点 000 和 111 上各加一个自环。

•有向图中共有16条弧，正好表示了16 个不同的四位二进制数。原问题就转化为判别该有向图是否为欧拉图。每个顶点的引入次数和引出次数都是 2，所以这个图是欧拉图，可找出一条欧拉回路

$(a_0, a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_4, a_9, a_3, a_6, a_{13}, a_{11}, a_7, a_{15}, a_{14}, a_{12}, a_8)$

•对应的 16 个二进制数字序列为 0000101001101111，将序列两端闭合，便得到16个二进制数的一个圆形排列，如下图。

(注：找出的欧拉回路不唯一，或者$(a_0, a_1, a_3, a_7, a_{15}, a_{14}, a_{12}, a_9, a_2, a_5, a_{11}, a_6, a_{13}, a_{10}, a_4, a_8)$)



13.2 哈密顿图

- **哈密顿圈、哈密顿回路、哈密顿图**
  - 称穿过**无向图** G 中每个顶点一次且仅一次的圈为**哈密顿圈。**
  - 称穿过**有向图** G 中每个顶点的基本回路为**哈密顿回路。**
  - 有哈密顿圈或哈密顿回路的图称为**哈密顿图。**

- **哈密顿链**：称穿过无向图 G 中**每个顶点**的**基本链**（顶点不同的链）为哈密顿链。

- **哈密顿通路**：称穿过有向图 G 中**每个顶点**的**基本通路**为哈密顿通路。

- 从哈密顿回路中去掉一条弧就成为哈密顿通路，从哈密顿圈中去掉一条边就成为哈密顿链。**哈密顿回路是完备回路，哈密顿通路是完备通路**，所以有向哈密顿图是强连通的，存

在哈密顿通路的有向图是单向连通的。存在哈密顿链的无向图是连通的。

- **哈密顿图的必要条件（只能判断不是哈密顿图）**：若无向图 $G=<V,E>$ 是哈密顿图，U 是 V 的非空真子集，则 $p(G-U)\leq|U|$。其中 $p(G-U)$ 是从 G 中删除 U 中所有顶点及它们关联的边所得子图的连通分支数。

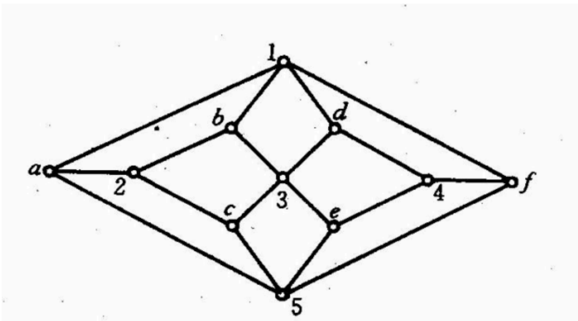
  •**证明** 设 C 是 G 的一个哈密顿圈。从 C 中去掉一个顶点，它仍是连通的。随后每去掉一个顶点，连通分支数至多加 1，故 $p(C-U)\leq|U|$。$C-U$ 是 $G-U$ 的生成子图，$p(G-U)\leq p(C-U)\leq|U|$。

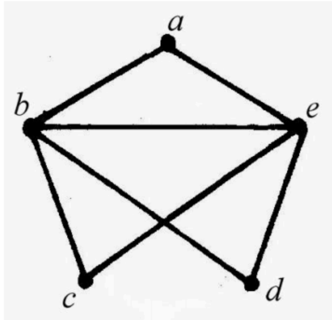
- **哈密顿链的必要条件（只能判断不是哈密顿链）**：若无向图 $G=<V,E>$ 有哈密顿链，U 是 V 的非空真子集，则 $p(G-U)\leq|U|+1$。其中 $p(G-U)$ 是从 G 中删除 U 中所有顶点及它们关联的边所得子图的连通分支数。

  •**证明** 设 P 是 G 的哈密顿链。从 P 中每去掉一点，连通分支数至多加 1，所以 $p(P-U)\leq|U|+1$。$P-U$ 是 $G-U$ 的生成子图，因此，

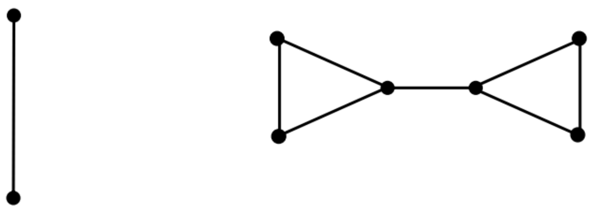
$$p(G-U)\leq p(P-U)\leq|U|+1$$

•上述必要条件常用于证明一个无向图没有哈密顿圈或哈密顿链。从左图中去掉顶点 1, 2, 3, 4, 5，成为 6 阶零图，所以它没有哈密顿圈，它有哈密顿链 (a, 2, b, 1, d, 4, f, 5, e, 3, c)。从右图中去掉顶点 b 和 e，成为 3 阶零图，所以它没有哈密顿圈，它有哈密顿链 (c, b, a, e, d)。





•上述存在哈密顿圈的必要条件不是充分条件。例如，左图满足存在哈密顿圈的必要条件，但是却没有哈密顿圈。右图中去掉中间两个顶点中任何一个，就不连通了，所以不满足存在哈密顿圈的必要条件，右图不是哈密顿图。



- **哈密顿链的充分条件**：若 n 阶简单无向图 G 中每对不相邻顶点次数之和 $\geq n-1$，则在 G 中存在**哈密顿链**。
- **哈密顿图的充分条件**：设 $n>2$，若 n 阶简单无向图 G 中每对不相邻顶点次数之和 $\geq n$ ，则 G 是**哈密顿图**。
- **定理13.4**：在有向完全图中必存在哈密顿通路。
- 凡是强连通的有向完全图一定有哈密顿回路。

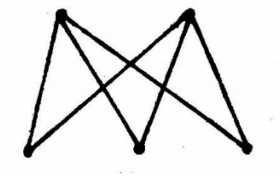
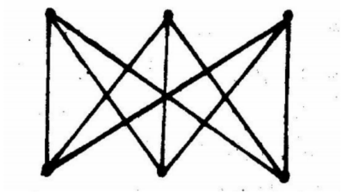
第14章 二分图的匹配问题

14.1 基本概念

- **二分图、互补顶点子集**：设 $G=<V,E>$ 是无向图。若可以将 V 分成两个非空子集 X 和 Y ，并且使得同一子集中的任何两个顶点都互不邻接，则称 G 为**二分图**。并称 X

和 Y 为 G 的**互补顶点子集**。即二分图的每条边都连接着 X 中的一个顶点和 Y 中的一个顶点。或者说任何一条边的两个端点，必然一个在 X 中，一个在 Y 中。
若非平凡图 G 的每个连通分支都是二分图或平凡图，则 G 是二分图。
二分图中必没有三角形的圈。

- **完全二分图**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集，若 X **中每个顶点都与** Y **中每个顶点邻接**，则称 G 为完全二分图。互补顶点子集分别有 p 个顶点和 q 个顶点的完全二分图记为 $K_{p,q}$ 。
  左图是 $K_{2,3}$，右图是 $K_{3,3}$ 。

- 若无向图 G 中有长度为奇数的闭合链，则在 G 中有长度为奇数的圈。

- **定理14.1**：非平凡无向图 G 是二分图当且仅当 G **的每个圈的长度都是偶数**。

> **判断是不是二分图**：构造两个点的集合，证明二者互补

- **匹配**（二分图左边的点和右边的点相连，每个点最多连一条线）：设 $G=<V,E>$ 是二分图，$M \subseteq E$ 。若 M 中任何两条边都不相邻，则称 M 为 G 的**匹配**。
  M 中的边一定把 X 中的一些顶点和 Y 中的相同数目的一些顶点一一配成对。
  M 中不一定把 X 中的顶点都包括了。

14.2 二分图的最大匹配

- **最大匹配**：在二分图 G 的所有匹配中，**边数最多的匹配**称为**最大匹配**。
- **交错链**：设 M 是二分图 G 的匹配， P 是 G 中的基本链。若 P 中任何相邻的两条边中恰有一条属于 M ，则称 P 为**关于** M **的交错链**，或简称为**交错链**。（即交错链中属于M的边和不属于M的边是交替出现的）
- **饱和顶点/非饱和顶点**：设 M 是二分图 G 的匹配，称与 M 中的边关联的顶点为 M 的**饱和顶点**，称不与 M 中任何边关联的顶点为 M 的**非饱和顶点**。
- **可扩充链**：两个端点都是**匹配** M **的非饱和顶点的交错链**称为关于 M 的**可扩充链**。
  可扩充链长度一定是奇数
  不在匹配中的边比在匹配中的边多一条
  可扩充链的两个非饱和端点，一定一个属于X，一个属于Y
  若将可扩充链中原来属于匹配的边从匹配中去掉，而将原来不属于匹配的边加入匹配中，则可得到多一条边的新匹配。
- **定理14.2**：二分图 $G=<V,E>$ 的匹配 M 是最大匹配当且仅当 G 中**不存在关于** M **的可扩充链**

14.3 从X到Y的匹配

- **从X到Y的匹配**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集， M 是 G 的匹配。若 X 中每个顶点都是 M 的饱和顶点，即是 M 中某条边的端点，则称 M 为**从 X 到 Y 的匹配。**
  显然，若存在从 X 到 Y 的匹配，则 $\#X \leq \#Y$ 。
  若 M 是从 X 到 Y 的匹配，则 M 是最大匹配。

- U **的邻域** $\Gamma(U)$：设 $U \subseteq X$ ，所有**与 U 中顶点相邻的顶点组成的集合**称为 U 的邻域，记为 $\Gamma(U)$。显然，$\Gamma(U) \subseteq Y$ 。

- **定理14.3 从X到Y的匹配的充要条件**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集。G 中存在从 X 到 Y 的匹配当且仅当满足以下相异性条件：对于 X 的任意子集 U ，$\#\Gamma(U) \geq \#U$。

- **从X到Y的匹配的算法**：
  1. 先任意找 G 中一个匹配 M 作为初始匹配.
  2. 如果 M 还不是从 X 到 Y 的匹配, 即有 $x_0 \in X$ 为非饱和顶点.
  3. 根据相异性条件, 设 x_0 有邻接顶点 $\{y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0k}\}$:
     - 若有某个 y_{0i} 为非饱和顶点, 则可扩充 (x_0, y_{0i}) 进 M ;
     - 若这 k 个邻接顶点都是饱和顶点,
       1. 则可构造 k 条以 x_0 为起点的交替链,
       2. 并**基于相异性条件，必可找到一条可扩充链**.

- **定理14.4 t条件 从X到Y的匹配的充分条件**：设 X 和 Y 是二分图 G 的互补顶点子集。若存在正整数 t，使得 X 中每个顶点的次数 $\geq t$，而 Y 中每个顶点的次数 $\leq t$，则 G 中存在从 X 到 Y 的匹配。

判断二分图是否存在从 X 到 Y 的条件

- 先用定理14.4
  - 成立：存在
  - 不成立：用定理14.3
    - 成立：存在
    - 不成立：不存在