一.选择题
二.填空题
三.计算题
四.计算解答题
五.随机过程
六.马尔可夫链

目 录

VI

n个独立同分布的随机变量求 max、min 有结论

设 $(X,Y) \sim N(0,\sigma^2;0,\sigma^2;0)$
求 $Z=X^2+Y^2$ 的分布函数

give nn. example.
例 eg

概率论

第1章 概率模型 笔记01

课程复习 概率论

概率论(1)：概率模型

- 概念：概率模型(样本空间+概率律)；事件；独立与条件概率；
- 知识点:事件相容与互逆；加法公式(画图！);乘法公式；全概率和贝叶斯公式；排列组合公式；
- 复习例题：P5 例2，P12 例6，P19 例2，P24 例6，P26 例2, P34 例7。

张思容 (BUAA)　概率统计与随机过程　December 24, 2024　3 / 31

1.0 例题们

事件相容5.2

例 2 试将事件 $A+B+C$ 表示为互不相容的事件之和．

解 利用 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，$A+B=A+(B-A)=A+(B-AB)=A+B\overline{A}$ 或 $A+B=(A-AB)+AB+(B-AB)$，得到

$$A+B+C=A+(B+C)=A+(B+C)\overline{A}$$

$$=A+(B+C\overline{B})\overline{A}=A+B\overline{A}+C\overline{B}\,\overline{A}.$$

还有其他分解表示法，不唯一．

几何概率12.6

例 6 在半径为 a 的圆内，取定一直径．过直径上任一点作垂直于此直径的弦，求：弦长小于$\sqrt{2}a$ 的概率（见图 1.2)．

解 设 $S=\{x\mid -a\leqslant x\leqslant a\}$，于是

$A=$“弦长小于$\sqrt{2}a$”

$$=\left\{x\,\middle|\,-a\leqslant x<-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}a<x\leqslant a\right\},$$

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{2\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}{2a}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.2929.$$

古典概率19.2

例 2 将 r 个有区别的球随机地放入 n 个不同的盒中（每个盒子容纳球的个数不限），$r\leqslant n$，试求：

（1）某盒（指定的一个盒）不多于两个球的概率；

（2）至少有一盒多于一个球的概率；

（3）恰有一盒多于一个球的概率.

解 设 $A=$ "某盒不多于两个球"，$A_i=$ "某盒恰有 i 个球"，$i=0,1,2$，$B=$ "至少有一盒多于一个球"，$C=$ "恰有一盒多于一个球"，每个球有 n 种放法，由乘法原理知，r 个球有 n^r 种不同放法，则基本事件总数为 n^r.

（1）A_i 含基本事件数为 $C_r^i(n-1)^{r-i}$，则

$$P(A_i)=\frac{C_r^i(n-1)^{r-i}}{n^r},\ i=0,1,2.$$

由于 $A=A_0+A_1+A_2$，且 A_0，A_1，A_2 互不相容．故根据概率的有限可加性得

$$P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)=\frac{(n-1)^r+C_r^1(n-1)^{r-1}+C_r^2(n-1)^{r-2}}{n^r};$$

（2）$\overline{B}=$ "每盒最多有一个球"，$\overline{B}$ 所含基本事件数为 A_n^r，

$$P(\overline{B})=\frac{A_n^r}{n^r}.$$

所以，由概率性质得

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{A_n^r}{n^r};$$

（3）设 $C_i=$ "恰好第 i 盒多于一个球"（另外的 $n-1$ 个盒每盒最多有一个球），则

$$P(C_i)=\frac{\sum_{j=2}^{r}C_r^jA_{n-1}^{r-j}}{n^r},\ i=1,2,\cdots,n.$$

由于 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，且 C_1，C_2，$\cdots$，C_n 互不相容，故根据概率的有限可加性得

$$P(C)=P(C_1)+P(C_2)+\cdots+P(C_n)=\frac{n\cdot\sum_{j=2}^{r}C_r^jA_{n-1}^{r-j}}{n^r}.$$

加法公式、乘法公式24.6

例 6 设 $P(A)=a$，$P(B)=b,b>0$，试证：$P(A|B)\geqslant\frac{a+b-1}{b}$.

证明 由 $1\geqslant P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=a+b-P(AB)$ 得 $P(AB)\geqslant a+b-1$，于是

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\geqslant\frac{a+b-1}{b}.$$

全概率公式26.2

例 2 设某昆虫产 k 个卵的概率为$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$，$\lambda>0$ 为常数，$k=0,1,2,\cdots$. 每个卵能孵化成幼虫的概率为 $p(0<p<1)$，且各个卵能否孵化成幼虫是相互独立的，求：该昆虫有后代的概率.

解 设 $A=$"该昆虫有后代"，$B_k=$"该昆虫产 k 个卵"，$k=0,1,2,\cdots$，易知，事件组 $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$满足定理 1′的条件，即

$$P(B_k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots.$$

设 $\overline{A}=$"该昆虫没有后代"，即每个卵都没孵化成幼虫，则

$$P(\overline{A}|B_k)=(1-p)^k,\ k=0,1,2,\cdots.$$

由全概率公式得

泰勒展开

$$P(\overline{A})=\sum_{k=0}^{+\infty}P(B_k)P(\overline{A}\mid B_k)$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(1-p)^k=e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!}}$$
$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}.$$

从而 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-e^{-\lambda p}$. 这里用到了公式 $e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$.

独立事件34.7

例 7 设某型号的高射炮，每一门炮发射一发炮弹而击中飞机的概率是 0.5. 问：至少需要多少门高射炮同时射击（每炮只射一发）才能以 99%的把握击中来犯的一架敌机.

解 设需要 n 门高射炮同时射击才能以 99%的把握击中来犯的一架敌机，令 $A_i=$"第 i 门炮击中敌机"，$A=$"敌机被击中"，则

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i,$$
$$P(A)=P\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=1-P\Big(\overline{\sum_{i=1}^{n}A_i}\Big)$$
$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})$$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$
$$=1-(0.5)^n\geqslant 0.99.$$

于是得 $0.01\geqslant(0.5)^n$，$\lg 0.01\geqslant \lg 0.5\cdot n$，$n\geqslant\frac{\lg 0.01}{\lg 0.5}\approx 6.644$，取 $n=7$.

故至少需要 7 门高射炮同时射击.

1.1 随机事件与样本空间(事件相容与互逆)

1.1.1 试验

- 确定性实验或必然试验
- 随机试验（简称试验）：用字母 E 或 $E_1, E_2, \ldots$ 表示
  - 在相同条件下可以重复进行
  - 每次实验的结果不止一个，但能事先**明确可能出现的结果范围**

- 每次试验之前**不能准确预言哪个结果会出现**

1.1.2 随机事件

- 随机事件（简称事件）
  - 在试验中**可能发生也可能不发生**的结果
  - 用字母 $A, B, C, \ldots$ 或字母 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 表示
- 基本事件：试验中每一个可能的结果，是**最简单的随机事件**
  - 常用小写字母 e 或 $e_1, e_2, e_3, \ldots$表示
  - 随机事件是**由若干个基本事件组成的**
  - **随机事件发生**⇔组成这一随机事件的**一个基本事件发生**
- 必然事件：在试验中必然发生的事件，记为S 或 Ω
- 不可能事件：不可能发生的事件，记为 $\varnothing$
  （必然事件和不可能事件不是随机事件，当作**特殊的随机事件**）

1.1.3 样本空间（集合论）

- 定义：试验的**全部基本事件**组合成的**集合**，称为试验的**样本空间**，记为 S 或 Ω
  - 试验的**基本事件**：是样本空间的**元素（样本点）**
  - **随机事件**是样本空间的**子集**
  - **不可能事件**表示**空集**，**必然事件**表示**样本空间**
- 完备事件组：若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互不相容，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = S$，则称 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为**完备事件组**，或称 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 为 S 的一个**划分。**

1.1.4 随机事件的关系(事件相容与互逆)（集合论）

随机事件的关系：

- 包含：$A \subseteq B$（A发生则B发生）
- 相等：$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- 并（和）：$A \cup B$ 或 $A + B$
- 交（积）：$A \cap B$ 或 AB
- 事件的互不相容（**互斥**）：$AB = \varnothing$
- 事件的互逆（**相互对立**）：$AB = \varnothing \wedge A + B = S$
  - 称 B 为 A 的逆事件，记为 $B = \overline{A}$
- 事件的差：$A - B = A\overline{B} = A - (AB)$

运算律：

- **吸收律**

$$
\begin{aligned}
A+S&=S & AS&=A\\
A+\varnothing&=A & A\varnothing&=\varnothing\\
A+AB&=A & A(A+B)&=A
\end{aligned}
$$

- **分配律**

$$
(A+B)C=AC+BC
$$
$$
A+BC=(A+B)(A+C)
$$

- **反演律**（De Morgan 公式）

$$
\overline{\sum_i A_i}=\prod_i \overline{A_i} \qquad \overline{\prod_i A_i}=\sum_i \overline{A_i}
$$
$$
\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}
$$

- 和事件分解为**互不相容事件**的和
  $A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}$
- **差化积**

$$
A-B=A\overline{B}=A-(AB)
$$

- 重余律

$$
\overline{\overline{A}}=A
$$

- 幂等律

$$
A+A=A \qquad AA=A
$$

- 交换律

$$
A+B=B+A \qquad AB=BA
$$

- 结合律

$$
(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (AB)C=A(BC)
$$

1.2 概率的定义及性质(排列组合)

对于事件 A，如果实数 $P(A)$:

- 表示**事件 A 发生的可能性**的大小
- 是事件 A 所固有的
  则称 $P(A)$ 为**事件 A 的概率。**

1.2.1 古典概率(排列组合)

- 定义：
  - 样本空间 S 包含 n 个基本事件，即$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
  - 每个基本事件发生的可能性相等，即$P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n)$

  则称这种试验为古典型随机试验，简称古典概型。

$$P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_N) = \frac{1}{n}$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，则 $P(A) = \dfrac{k}{n}$

- 排列数记号：$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- 组合数记号：$C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- 乘法原理

Theorem (乘法原理)

完成一件事要k步，每一步分别有$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$方法，则完成这件事的方法共有$n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

- (m次试验)：从n个元素中有放回的每次取一个；取出m个元素,排成一列；共有 n^m种可能；不同排列是等可能的；
- (m元排列) 从n个元素中无放回的每次取一个；取出m个元素,排成一列；共有 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$种可能；不同排列是等可能的；
- (m元组合) 从n个元素中无放回的每次取一个；取出m个元素,放在一组；共有 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$种可能；不同组合是等可能的；
- (k重分组) 将n个元素分成不同的k组，不考虑每组中的元素次序；第i个组恰有n_i个元素的可能分组为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$种可能；不同分组是等可能的；

- 古典概率的性质：
  - 对任意随机事件 A，$0 \leq p(A) \leq 1$；
  - $P(S) = 1$；
  - （有限可加性）若事件 $A_1, A_2, \ldots A_m$ 互不相容，则 $P(\sum\limits_{i=1}^{m} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} P(A_i)$

1.2.2 几何概率

- 定义：设几何概型的样本空间为S，A 是含于 S 在内的任一随机事件，即 $A \subseteq S$，则称 $P(A) = \dfrac{L(A)}{L(S)}$ 为事件 A 的概率。
- 性质：
  - 对任一随机事件 A，$0 \leq P(A) \leq 1$；
  - $P(S) = 1$；
  - （有限可加性）若事件 $A_1, A_2, \ldots A_m$ 互不相容，则 $P(\sum\limits_{i=1}^{m} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} P(A_i)$

- （可列可加性）若事件$A_1, A_2, \ldots$互不相容，则$P(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$

1.2.3 概率的统计定义

- 频率的定义：设某实验重复做了 n 次，事件A共发生了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 n 次试验中事件 A 发生的频率，即 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$
- 频率的性质
  - 对任一随机事件 A ，$0 \le f_n(A) \le 1$;
  - $f_n(S) = 1$;
  - 若事件 $A_1, A_2, \ldots A_m$ 互不相容，则 $f_n(\sum_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$
- 统计概率的定义：若随着试验次数 n 的增大，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在某个常数 $p(0 \le p \le 1)$ 附近摆动，并且逐渐趋于该常数，则称该常数 p 为事件 A 的概率，即 $P(A) = p$ 。并把这样定义的概率称为**统计概率（经验概率）**。
- 概率的近似求法：$P(A) \approx f_n(A)$

1.3 概率的公理化定义(加法公式)

1.3.1 事件域

随机试验 E，样本空间 S，设 $F = \{A|A \subseteq S\}$，并满足以下条件：

- $\varnothing \in F$，$S \in F$
- 若 $A \in F$，则 $\overline{A} \in F$
- 对任意有限个或可列个 $A_i \in F$ ，都有 $\sum_i A_i \in F$

  也就是说，F 是一些随机事件组成的集合（且具有一定的构造关系），称 F 为**事件域。**

1.3.2 概率的公理化定义

设 $P = P(A)$ 是定义在 F 上的一个实值函数， $A \in F$ ，并且 $P = P(A)$ 满足以下三个条件：

- 对每一个 $A \in F$，$0 \le P(A) \le 1$
- $P(S) = 1$
- 对任意可列个互不相容的事件 $A_1, A_2, \ldots$，有$P(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$

  则称 P 为 F 上的**概率测度函数**，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

1.3.3 概率的性质

- 不可能事件的概率为0，即 $P(\varnothing) = 0$

- 概率具有有限可加性
- 对任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A) \qquad P(A)=1-P(\overline{A})$
- 若 $B\subseteq A$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$ 且 $P(B)\le P(A)$
- 加法公式：对任意事件 A,B 有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ **(推广)**

1.4 条件概率与乘法公式

- 定义：B 发生的条件下 A 发生的概率：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 性质
  - $0\le P(A|B)\le 1$
  - $P(S|B)=1$
  - 若 $A_1,A_2,...$ 互不相容，则 $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$
  - 对任意事件 A，$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$
- 乘法公式：

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A) \qquad (P(B)>0,P(A)>0)$$

- 当 $P(A_1A_2...A_{n-1})>0$ 时

$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$

1.5 全概率公式与贝叶斯公式

设事件组 $B_1,B_2,...,B_n$ 满足：

- $\sum\limits_{i=1}^{\infty}B_i=S$
- $B_1,B_2,...,B_n$互不相容
- $P(B_i)>0$

全概率公式：

则对任意事件 A，恒有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

贝叶斯公式：

对任意事件 $A(P(A)>0)$，有

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

1.6 事件的独立性

1.6.1 两个事件的独立性

定义：

对任意两个事件 A, B，若：

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 相互独立，简称独立。

定理：

对任意事件 A, B，设 $P(B)>0$，则A 与 B 独立的充分必要条件是

$$P(A|B)=P(A)$$

性质：

概率为 0 或 1 的事件与任意事件相互独立：

- 概率为 0 的事件不一定是不可能事件
- 概率为 1 的事件不一定是必然事件

1.6.2 多个事件的独立性

定义：

- 若事件 $A_1, A_2, ..., A_n$ 满足条件：

  $$\forall i,j,\ P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\ 1\le i,j\le n$$

  则称 n 个事件是**两两独立**的。
- 若事件 $A_1, A_2, ..., A_n$ 满足条件：

  $$\forall k,i,\ P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k}),\ k\ge 2, i_k\ge 1$$

  则称 n 个事件**相互独立**。

1.6.3 独立事件的性质

若 A 与 B 相互独立，则

- A 与 $\overline{B}$ 相互独立

- $\overline{A}$ 与 B 相互独立
- $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立

  （可推广到多个事件）

第23章 随机变量与随机向量 笔记02的1 2

概率论(2): 随机变量与随机向量

- 概念：随机变量X,(累积)分布函数$F(x)$,概率密度函数$f(x)$, p_i. 事件$(-\infty,x)$
  随机向量,联合分布$F(x,y)$或表格, 事件$(-\infty,x)\times(-\infty,y)$;
- 知识点:边缘分布概率$F_X(x)$公式;边缘密度公式,条件分布概率公式$F(X|Y)$； 条件密度公式及独立;
- 随机变量例子: 贝努利分布,几何分布， 二项分布,泊松分布; 均匀分布，指数分布， 正态分布;
  随机向量例子: 二维离散分布； 二维正态分布;
  n维独立分布的联合密度即密度函数的乘积;
- 复习例题:
  P41例2，P45例3，P49例3，P54例3，P56例1，P64例2，
  P71例2，P72例3，P80例2，P83例1，P86例3，P95例6，

给出离散情形的分布函数，可以画表格或者写F

2.0 例题们

分布函数的性质

例 2 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a+be^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

(1) 确定常数 a，b；

(2) 求：$P\{X\leqslant \ln 2\}$和 $P\{X>1\}$.

解 (1) 由分布函数的性质得

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(a+be^{-x})=a,$$

$$0=F(0)=\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(a+be^{-x})=a+b,$$

所以 $a=1$，$b=-1$，$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$；

(2) $P\{X\leqslant\ln2\}=F(\ln2)=1-e^{-\ln2}$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X>1\}=1-P\{X\leqslant1\}=1-F(1)$$

$$=1-(1-e^{-1})=e^{-1}.$$

离散型随机变量、分布列、分布函数

例 3 将红、白、黑三只球随机地逐个放入编号为 1，2，3 的 3 个盒内（每盒容纳球的个数不限），以 X 表示有球盒子的最小号码，求：随机变量 X 的分布律与分布函数．

解 根据题意知，随机变量 X 可能取的值为 1，2，3，$P\{X=3\}=\frac{1^3}{3^3}=\frac{1}{27}$，$P\{X=2\}=\frac{2^3-1^3}{3^3}=\frac{7}{27}$，$P\{X=1\}=\frac{3^3-2^3}{3^3}=\frac{19}{27}$，即随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{19}{27}, & 1\leqslant x<2\\ \frac{26}{27}, & 2\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}.$$

二项分布

例 3 袋中有 10 件产品，其中 6 件一级品，4 件二级次品，做有放回抽取 5 次，每次抽取一件，求：(1) 恰取到 2 件一级品的概率；(2) 至少取到 4 件一级品的概率．

解 设 $A=$“取到一级品”，$P(A)=0.6$，记 X 为 5 次抽取中取到一级品的次数，则 $X\sim B(5，0.6)$．于是

(1) $B=$“恰取到 2 件一级品”，

$$P(B)=P\{X=2\}=\mathrm{C}_5^2(0.6)^2(0.4)^3=0.2304;$$

(2) $C=$“至少取到 4 件一级品”，

$$P(C)=P\{X\geqslant 4\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}$$
$$=\mathrm{C}_5^4(0.6)^4(0.4)^1+\mathrm{C}_5^5(0.6)^5=0.3370.$$

连续随机变量 已知概率密度求分布、求**P**

例 3 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求：(1) $P\left\{|X|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$；

(2) X 的分布函数．

解 (1) $P\left\{|X|\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{-\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}=0.75.$$

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$．

当 $x<-1$ 时，

$$f(t)=0,\ -\infty<t\leqslant x,\ F(x)=0;$$

当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=0+\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_{-1}^{x}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2};$$

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=0+\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}t$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_{0}^{x}$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2};$$

当 $x\geqslant 1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=0+\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}(1-t)\mathrm{d}t+0=1.$$

于是，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}, & -1\leqslant x<0\\ -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}.$$

连续分布

例 1 设随机变量 $\zeta \sim U[-4, 4]$，试求：方程 $4t^2+4\zeta t+\zeta+6=0$ 有实根的概率．

解 ζ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & -4\leqslant x\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

设 $A=$ “方程 $4t^2+4\zeta t+\zeta+6=0$ 有实根”，即

$$\begin{aligned}A&=\{(4\zeta)^2-4\times 4\times(\zeta+6)\geqslant 0\}\\&=\{\zeta^2-\zeta-6\geqslant 0\}\\&=\{\zeta\geqslant 3\}+\{\zeta\leqslant -2\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P\{\zeta\geqslant 3\}+P\{\zeta\leqslant -2\}\\&=\int_3^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-2}f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_3^4\frac{1}{8}\mathrm{d}x+\int_{-4}^{-2}\frac{1}{8}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}=0.375.\end{aligned}$$

正态分布 分位点

例 2 设随机变量 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，试用分位点表示下列常数 a，b：

(1) $\mu=0$，$\sigma=1$，$P\{-X<a\}=0.025$；

(2) $\mu=1$，$\sigma=2$，$P\{|X-1|\leqslant b\}=0.75$.

解 (1) $X\sim N(0, 1)$，

$$\begin{aligned}P\{-X<a\}&=P\{X>-a\}\\&=1-P\{X\leqslant -a\}=0.025,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant -a\}&=1-0.025=0.975\\&=P\{X\leqslant z_{0.975}\},\end{aligned}$$

因此，$-a=z_{0.975}$，$a=-z_{0.975}=z_{0.025}$；

(2) $X\sim N(1, 2^2)$，

$$\begin{aligned}P\{|X-1|\leqslant b\}&=P\{1-b\leqslant X\leqslant 1+b\}\\&=F(1+b)-F(1-b)\\&=\Phi\left(\frac{1+b-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-b-1}{2}\right)\\&=\Phi\left(\frac{b}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{b}{2}\right)\\&=\Phi\left(\frac{b}{2}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{b}{2}\right)\right]\\&=2\Phi\left(\frac{b}{2}\right)-1=0.75,\text{ 推得}\end{aligned}$$

$$2\Phi\left(\frac{b}{2}\right)=1.75, \Phi\left(\frac{b}{2}\right)=0.875=\Phi(z_{0.875}),$$

$$\frac{b}{2}=z_{0.875}, \text{故 } b=2z_{0.875}.$$

2.1 随机变量

定义：

设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，对于每一个 $e \in S$，都有唯一的一个实数 $X(e)$ 与之对应，并且对于任意的实数 x，则称这样的实值函数 $X=X(e)$ 为随机变量，简记为 X。

2.2 随机变量的分布函数

2.2.1 定义：

设 X 为随机变量，对于任意的实数 x，令 $F(x)=P\{X \leq x\},-\infty<x<\infty$，称 $F(x)$ 为随机变量 X 的**概率分布函数**，简称**分布函数。**
记为 $X \sim F(x)$
$F(x)=P\{X \leq x\}=P\{e \in S|-\infty<X(e) \leq x\}$

2.2.2 性质：

- 取值范围：$0 \leq F(x) \leq 1$，且
  $F(+\infty)=\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} F(x)=1 \qquad F(-\infty)=\lim\limits_{x \rightarrow-\infty} F(x)=0$
- 单调不减：$x_1<x_2 \implies F(X_1) \leq F(x_2)$
- 右连续：$F(x_0^+)=\lim\limits_{x \rightarrow x_0^+} F(x)=F(x_0)$
  反之：**若定义在** $(-\infty,+\infty)$ 的实函数$F(x)$满足以上性质，则$F(x)$一定是**某随机变量** X**的分布函数。**（判断是否为随机变量的分布函数）
- 对任意实数 $a, b, a<b$，
  $P\{a<X \leq b\}=P\{X \leq b\}-P\{X \leq a\}=F(b)-F(a)$
- 对任意实数 x_0，有$P\{X=x_0\}=P\{X \leq x_0\}-P\{X<x_0\}$

2.3 离散型随机变量及其概率分布

2.3.1 离散型随机变量的定义

若随机变量X只可能取**有限个**或**可数个**实数值 $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \quad (x_i \neq x_j, \forall i \neq j)$
则称X为**离散型随机变量。**
X取各个可能的值的概率$p_k=P\{X=x_k\}, k=1,2, \ldots$称为离散型随机变量$X$的**概率分布**（或**分布律**、**分布列**）。

2.3.2 离散型随机变量分布律的表示方法

- 公式法
- 列表法或矩阵法

X	x_1	x_2	...	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

2.3.3 离散型随机变量的分布律的性质

1. $p_k = P\{X = x_k\} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots$
2. $\sum_k p_k = 1$

2.3.4 定理

设离散型随机变量X的分布律$p_k = P\{X = x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$

- X的分布函数$\forall x \in R, F(x) = P\{X \leq x\} = \sum\limits_{x_k \leq x} P\{X = x_k\} = \sum\limits_{x_k \leq x} p_k$
- 对于任意区间I，有$P\{X \in I\} = \sum\limits_{x_k \in I} P\{X = x_k\} = \sum\limits_{x_k \in I} p_k$
- 由分布函数可确定分布律$p_k = P\{X = x_k\} = F(x_k) - F(x_k^-) \quad k = 1, 2, \ldots$

2.4 常用离散型随机变量的分布(几何分布)

2.4.1 两点分布

定义：

若随机变量X的分布律为：

$$\begin{array}{l} P\{X = 1\} = p, \\ P\{X = 0\} = 1 - p \end{array} \quad (0 < p < 1)$$

则称 X 服从参数 p 的**两点分布**，或称 **(0-1)分布**，$B(1, p)$。一般来说，凡是只有两个可能结果的随机试验都可以用两点分布的随机变量来描述。

2.4.2 二项分布

> 来源：n**重伯努利试验**
>
> 设试验 E 只有两个可能的结果：A 和 $\overline{A}$。
>
> $P(A) = p \quad (0 < p < 1), \quad P(\overline{A}) = 1 - p$
>
> 将试验E独立地重复做n次，则这n次独立重复试验称为n重伯努利试验。

如果随机变量X的分布律为：

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \quad (0 < p < 1)$$

则称X服从参数为n,p的二项分布，记作 $X \sim B(n,p)$

> 两点分布是二项分布的特殊形式

2.4.3 泊松分布

定义：

若随机变量 X 的分布律为：

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\dots\quad(\lambda>0)$$

则称 X 服从**参数为** λ 的**泊松分布**，记作 $X\sim\Pi(\lambda)$
泊松分布适用于描述**单位时间（或空间）内随机事件发生的次数。**

Poisson 定理

设 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$，则对固定的 k，

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\quad k=0,1,2,\dots$$

Poisson 定理说明：若 $X\sim B(n,p)$，则当 n 较大，p 较小，而$np=\lambda$ 适中，则可使用近似公式：

$$C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\approx e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\quad k=0,1,2,\dots$$

2.4.4 几何分布(Geom(p))

- 随机变量 Y 的取值为自然数N，且满足$P(Y=k)=p(1-p)^{k-1}$，其中 $0<p<1,k=1,2,\dots,\infty$
- 概率模型：重复试验直到首次成功时的试验次数。
- 应用：离散等待时间和无记忆性

2.4.5 超几何分布

设一批产品中有M件正品，N件次品，从中任意取 n 件，则取到的次品数 X 是一个离散型随机变量，它的概率分布为：

$$P\{X=k\}=\frac{C_N^k\cdot C_M^{n-k}}{C_{M+N}^n}\quad k=0,1,2,\dots,min(n,N)$$

这个分布称为**超几何分布**，记为 $H(n,M,N)$

2.5 连续型随机变量及其概率密度函数

2.5.1 定义

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，如果存在一个定义在$(-\infty,+\infty)$ 上**非负可积函数** $f(x)$，使得对任何实数 x 恒有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

则称 X 为连续型随机变量，称函数$f(x)$为随机变量X的概率密度函数（或分布密度函数），简称**概率密度。**

2.5.2 概率密度函数的性质

1. 对一切 $x\in(-\infty,+\infty), f(x)\geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=F(+\infty)=1$
   反之，**任何一个具有以上性质的可积实函数**$f(x)$，可成为某个连续型随机变量的**概率密度函数。**
3. $P\{X=x\}=F(x)-F(x^-)=0,\forall x\in(-\infty,+\infty)$
   连续型随机变量取任何特定值的概率都是 0
4. 设 $I=(a,b]$ 或 $[a,b]$或$[a,b)$或(a,b)，允许 $a=-\infty$，或 $b=+\infty$，则

$$P\{X\in I\}=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

> 连续性随机变量在任一区间上取值的概率为此区间上概率密度函数曲线下方的曲边梯形的面积。

设 X 为连续型随机变量，分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$，则有

- $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$是连续函数
- 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $F(x)$ 在 x_0 点可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$
- 若$f(x)$是分段连续函数，只有有限个不连续点，则$F'(x)=f(x)$

2.6 常用的连续型随机变量分布(正态分布)

2.6.1 均匀分布

若连续型随机变量 X，它的**概率密度**为:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a,b]$ 上服从**均匀分布**。记作 $X\sim U[a,b]$。

2.6.2 指数分布

如果随机变量 X 的**概率密度**为:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}\qquad (\lambda>0\text{为常数})$$

则称 X 为服从参数 λ 的**指数分布**，记为 $X\sim e(\lambda)$。
若 X 服从参数为 λ 的指数分布，则它的**分布函数**为:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

2.6.3 正态分布

定义:

若 X 为连续型随机变量，且其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$ 均为常数，那么称 X 为服从参数为 μ,σ 的正态分布。记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

性质:

1. 曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，$(-\infty,\mu]$递增，$[\mu,+\infty)$ 递减；当 $x=\mu$ 时，$f(x)$ 达到最大值 $f_{max}(\mu)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$；
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$，曲线以 x 轴为渐近线；
3. 曲线在 $x=\mu+\sigma$ 及 $x=\mu-\sigma$ 处有拐点。

2.6.4 标准正态分布

参数 $\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布，即 $N(0,1)$ 称为标准正态分布，其概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示。

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,\quad -\infty<x<+\infty$$

$\Phi(x)$ 的性质：

1. $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$
2. $\Phi(0)=\frac{1}{2}$
3. $\Phi'(x)=\varphi(x)>0$
   即 $\Phi(x)$ 严格单调递增

$N(\mu,\sigma^2)$与标准正态分布 $N(0,1)$ 的关系

$$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}),\quad -\infty<x<+\infty$$

标准正态分布 $N(0,1)$ 的下侧 α 分位点

定义：

设 $X\sim N(0,1)$，给定 $\alpha(0<\alpha<1)$，若存在唯一的 z_α ，使得

$$P\{X\le z_\alpha\}=\Phi(z_\alpha)=\alpha$$

称 z_α 为 $N(0,1)$ 的下侧 α 分位点（分位数）。

分位点的性质：

$\forall\alpha(0<\alpha<1)$

1. $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$
2. $P\{X>z_{1-\alpha}\}=\alpha$
3. $P\{|X|>z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$ 或 $P\{|X|\le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$

3.0 例题们

分布函数

例 2 设二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x, y)=\begin{cases}(a-e^{-2x})(b-e^{-y}), & x>0, y>0 \\ 0, & 其他\end{cases},$$

(1) 确定常数 a，b；(2) 求：$P\{X>0, Y\leqslant 2\}$.

解 (1) 利用分布函数的性质

$$1=F(+\infty, +\infty)=a\cdot b,$$

$$0=F(0, y)=\lim_{x\to 0^+}F(x, y)=(a-1)(b-e^{-y}),$$

以及 $y>0$ 的任意性，得 $a-1=0$，$a=1$，所以 $a=1$，$b=1$；

(2) $P\{X>0, Y\leqslant 2\}=P\{0<X<+\infty, -\infty<Y\leqslant 2\}$

$$=F(+\infty, 2)+F(0, -\infty)-F(0, 2)-F(+\infty, -\infty)$$

$$=1\cdot(1-e^{-2})+0-0-0=1-e^{-2}.$$

二维离散变量 联合分布律

例 3 甲、乙两盒内均有 3 只晶体管，其中甲盒内有 1 只正品、2 只次品，乙盒内有 2 只正品、1 只次品．第一次从甲盒内随机取出 2 只晶体管放入乙盒内，第二次从乙盒内随机取出 2 只晶体管．以 X、Y 分别表示第一、第二次取出的正品晶体管的数目．试求：(X, Y)的分布律以及 $P\{(X, Y)\in D\}$，其中 D：$\{(x, y)\mid x^2+y^2\geqslant 2\}$．

解 根据题意知，X 的可能取值为 0 和 1；Y 的可能取值为 0、1 和 2．因此，(X, Y)的可能取值为(0, 0)，(0, 1)，(0, 2)，(1, 0)，(1, 1)，(1, 2)．

(X, Y)是离散型随机变量．

$\{X=0\}$ 表示从甲盒内取出 2 只次品晶体管放入乙盒内，此时乙盒内有 2 只正品，3 只次品，利用乘法公式可得

$$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{C_2^2}{C_3^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{30},$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{C_2^2}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{30},$$

$$P\{X=0, Y=2\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=2\mid X=0\}=\frac{C_2^2}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{30}.$$

$\{X=1\}$表示从甲盒内取出 1 只正品和 1 只次品晶体管放入乙盒内，此时乙盒内有 3 只正品，2 只次品，利用乘法公式可得

$$P\{X=1, Y=0\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{30},$$

$$P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{12}{30},$$

$$P\{X=1, Y=2\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=2\mid X=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{6}{30},$$

于是得(X, Y)的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{1}{30}$
1	$\frac{2}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{6}{30}$

$$P\{(X, Y)\in D\}=P\{X=0, Y=2\}+P\{X=1, Y=1\}+P\{X=1, Y=2\}=\frac{1}{30}+\frac{12}{30}+\frac{6}{30}=\frac{19}{30}.$$

二维离散变量 联合分布律 边缘分布律

例 2 某射手在射击中，每次击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击进行到第二次击中目标为止，X 表示第一次击中目标时所进行的射击次数，Y 表示第二次击中目标时所进行的射击次数，试求：二维随机变量(X, Y)的联合分布律和边缘分布律．

解 设 $A_k=$"第 k 次射击时击中目标"，$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$相互独立．根据题意知，

$$\{X=i, Y=j\}=\overline{A_1}\cdots\overline{A_{i-1}}A_i\overline{A_{i+1}}\cdots\overline{A_{j-1}}A_j.$$

(X, Y)的分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_{i-1}})P(A_i)P(\overline{A_{i+1}})\cdots P(\overline{A_{j-1}})P(A_j)$$
$$=p^2(1-p)^{j-2},\ i=1, 2, \cdots, j-1;\ j=2, 3, \cdots.$$

(X, Y)关于 X 的边缘分布律

$$P\{X=i\}=\sum_{j=2}^{+\infty}P\{X=i, Y=j\}=\sum_{j=i+1}^{+\infty}p^2(1-p)^{j-2}$$

$$=p^2(1-p)^{i-1}\sum_{j=i+1}^{+\infty}(1-p)^{j-(i+1)}$$

$$=p^2(1-p)^{i-1}\frac{1}{1-(1-p)}=p(1-p)^{i-1},\ i=1, 2, \cdots.$$

(X, Y)关于 Y 的边缘分布律

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=i, Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}p^2(1-p)^{j-2}$$
$$=(j-1)p^2(1-p)^{j-2},\ j=2, 3, \cdots.$$

对此题也可以直接求出 X 的分布律和 Y 的分布律．

二维连续变量 边缘概率密度

于是(X, Y)关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y \text{ 和 } f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

例 1 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}2xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2x \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求：关于 X 和 Y 的边缘概率密度．

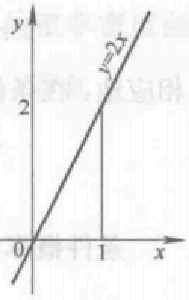


图 3.4

解 如图 3.4 所示．$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{0} f(x, y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{2x}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{2x} 2xy\mathrm{d}y=x\cdot y^2\Big|_0^{2x}=4x^3.$$

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，因为 $f(x, y)=0$，所以 $f_X(x)=0$，于是得(X, Y)关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $0\leqslant y\leqslant 2$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} f(x, y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{y}{2}}^{1} f(x, y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{y}{2}}^{1} 2xy\mathrm{d}x=y\cdot x^2\Big|_{\frac{y}{2}}^{1}=y\left(1-\frac{1}{4}y^2\right).$$

当 $y<0$ 或 $y>2$ 时，因为

$$f(x, y)=0,\ f_Y(y)=0,$$

于是得(X, Y)关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}y\left(1-\frac{1}{4}y^2\right), & 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

二维连续变量 条件概率密度

例 3 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}2xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2x \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

(1) 求：关于 X 和 Y 的边缘概率密度；

(2) 求：条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 和 $f_{Y|X}(y\mid x)$；

(3) 求：$P\left\{X\geqslant\frac{3}{4}\middle|Y=1\right\}$和$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}$.

(2) 当 $0<y<2$ 时，$f_Y(y)\neq 0$，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{8x}{4-y^2}, & \dfrac{y}{2}\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他 } x\end{cases};$$

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)\neq 0$，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x, y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{y}{2x^2}, & 0\leqslant y\leqslant 2x \\ 0, & \text{其他 } y\end{cases};$$

(3) 当 $Y=1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|1)=\begin{cases}\dfrac{8x}{3}, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他 } x\end{cases};$$

当 $X=\frac{1}{2}$时，

$$f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}2y, & 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他 } y\end{cases}.$$

故

$$P\left\{X\geqslant\frac{3}{4}\middle|Y=1\right\}=\int_{\frac{3}{4}}^{+\infty}f_{X|Y}(x\mid 1)\mathrm{d}x=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{8}{3}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}x^2\Big|_{\frac{3}{4}}^{1}=\frac{7}{12}.$$

$$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}2y\mathrm{d}y=y^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

二维离散变量 边缘分布律 独立

例 6 接连不断地掷一颗匀称的骰子，直到出现点数大于 2 为止，以 X 表示掷骰子的次数，以 Y 表示最后一次掷出的点数.

(1) 求：二维随机变量 (X, Y) 的分布律；

(2) 求：(X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布律；

(3) 证明：X 与 Y 相互独立.

5，6.

设 B_k = "第 k 次掷时掷出 1 点或 2 点"，A_{kj} = "第 k 次掷时掷出 j 点"，则

$$P(B_k)=\frac{2}{6},\ P(A_{kj})=\frac{1}{6},\ B_k+A_{k3}+A_{k4}+A_{k5}+A_{k6}=S.$$

$\{X=i, Y=j\}$ = "掷骰子 i 次，最后一次掷出 j 点，前 $(i-1)$ 次掷出 1 点或 2 点" $=B_1\cdots B_{i-1}A_{ij}$ （各次掷骰子出现的点数相互独立）.

于是 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=\left(\frac{2}{6}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1},\ i=1, 2, \cdots;\ j=3, 4, 5, 6.$$

例如，$P\{X=i, Y=3\}=\left(\frac{2}{6}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$.

$$\begin{aligned}(2)\ P\{X=i\}&=\sum_{j=3}^{6}P\{X=i, Y=j\}\\&=\sum_{j=3}^{6}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}=4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\\&=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1},\ i=1, 2, \cdots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=j\}&=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=i, Y=j\}\\&=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4},\ j=3, 4, 5, 6;\end{aligned}$$

或由题意知，$\{X=i\}$ = "掷骰子 i 次，最后一次掷出的点数大于 2，前 $(i-1)$ 次掷出 1 点或 2 点"，于是

$$P\{X=i\}=\left(\frac{2}{6}\right)^{i-1}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1},\ i=1, 2, \cdots;$$

$\{Y=j\}$ = "在掷出点数大于 2 的条件下，掷出的是 j 点"，于是

$$P\{Y=j\}=\frac{1}{4},\ j=3, 4, 5, 6.$$

(3) 由 $P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$，可知

$$P\{X=i, Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\},\ i=1, 2, \cdots;\ j=3, 4, 5, 6.$$

所以 X 与 Y 相互独立.

3.1 二维随机变量

3.1.1 定义1

设试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，而 $X=X(e), Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量。称由这两个随机变量组成的向量 (X,Y) 为**二维随机变量**或**二维随机向量**。

3.1.2 定义2

设 (X,Y) 为二维随机变量，对任意实数 x,y，二元函数
$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$ 称为**二维随机变量的分布函数**，或称为**随机变量** X **与** Y **的联合分布函数。**

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

- 定义域：$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$
- 取值范围：$0\le F(x,y)\le 1$
- 特殊值：

$$
\begin{aligned}
F(-\infty,-\infty)&=\lim_{\substack{x\to-\infty\\y\to-\infty}}F(x,y)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\y\to-\infty}}P\{X\le x,Y\le y\}=0\\
F(+\infty,+\infty)&=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}P\{X\le x,Y\le y\}=1\\
F(x,-\infty)&=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=\lim_{y\to-\infty}P\{X\le x,Y\le y\}=0\\
F(-\infty,y)&=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=\lim_{x\to-\infty}P\{X\le x,Y\le y\}=0
\end{aligned}
$$

- $F(x,y)$ 对 x 或 y 单调不减
- $F(x,y)$ 对 x 或 y 右连续
- 对任意实数 $x_1<x_2,y_1<y_2$ 有

$$
\begin{aligned}
0&\le P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}\\
&=F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)
\end{aligned}
$$

反之：凡是满足以上性质的二元函数 $F(x,y)$ 必定是某个二维随机变量的分布函数。

3.1.3 定义3

设试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，而 $X_i=X_i(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，
$i=1,2,...,n$ 由这 n 个随机变量构成的有序随机变量组 $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ 称为 n **维随机变量或随机向量。**
设 $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ 为 n 维随机变量，对任意实数 $x_1,x_2,\dots,x_n$，n 元函数
$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n\}$ 称为 n **维随机变量** $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ **的分布函数**或n个随机变量 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 的**联合分布函数。**

3.2 二维离散型随机变量

3.2.1 定义

若二维随机变量 (X,Y) 的取值为**有限对**或**可列对** $(x_i,y_j),i,j=1,2,\ldots$，则称 (X,Y) 是离散型随机变量。

3.2.2 分布律

记 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\ldots$

称为二维离散型随机变量 (X,Y) 的（概率）分布律，或称为 X 和 Y 的**联合**（概率）**分布律**。

分布律的表示法：（1）公式法；（2）列表法

3.2.3 性质

1. $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}\geq 0,i,j=1,2,\ldots$
2. $\sum\limits_{i,j}p_{ij}=1$

3.2.4 定理

设 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\ldots$
则随机点 (X,Y) 落在平面上任一区域 D 的概率

$$P\{(X,Y)\in D\}=\sum_{(x_i,y_i)\in D}p_{ij}$$

其中和式是对所有使 $(x_i,y_i)\in D$ 的 i,j 求和。

3.3 二维连续型随机变量

3.3.1 定义

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$,若有非负可积函数 $f(x,y)$,使得对任意实数 x,y, 恒有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,dudv$$

则称 (X,Y) 是二维**连续型随机变量**，函数 $f(x,y)$ 称为二维连续型随机变量 (X,Y) 的**概率密度**，或称为随机变量 X 和 Y 的**联合概率密度**。

3.3.2 性质

X,Y 的概率密度 $f(x,y)$ 具有下列基本性质：

1. $f(x,y)\geq 0 \qquad -\infty<x,y<+\infty$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = F(+\infty,+\infty)=1$
   反之, 若二元函数$f(x,y)$满足上面两条基本性质，则它一定是某个二维随机变量(X,Y)的概率密度
3. 如果概率密度$f(x,y)$在点(x,y)处连续, 则有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)=f(x,y)$$

3.2.3 用概率密度计算概率

定理：设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$ 则有：

1. 设 D 为平面上的任一区域，则：
   $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$
   $F(x,y)=\iint\limits_{\substack{u\le x\\ v\le y}} f(u,v)\,dudv$
2. $P\{a<X\le b, c<Y\le d\}=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx$

3.2.4 常用的二维连续型随机变量有下面几种：

均匀分布

若二维连续型随机变量 (X,Y) 概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 A 为有界区域 D 的面积。则称 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，记为 $(X,Y)\sim U(D)$

二维正态分布

若随机变量 (X,Y) 概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu}{\sigma_2}\right.\right.$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

3.3 边缘分布函数

定义：

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$（分量 X 与 Y 的联合分布函数）
分量 X 的**分布函数**：

$$\begin{aligned}p\{X\le x\}&=P\{X\le x,Y<+\infty\}\\&=\lim_{y\to+\infty}P\{X\le x,Y\le y\}\\&=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)\\&=F(x,+\infty)\\&\triangleq F_X(x)\end{aligned}$$

称 $F_X(x)$ 为 (X,Y) 关于 X 的**边沿分布函数。**

分量 Y 的**分布函数**：

$$P\{Y\le y\}=F(+\infty,y)=F_Y(y)$$

称 $F_Y(y)$ 为 (X,Y) 关于 Y 的**边沿分布函数。**

注：

已知联合分布函数 $F(x,y)$，可以计算出边沿分布函数 $F_X(x),F_Y(y)$
但由 X,Y 各自的分布函数 $F_X(x),F_Y(y)$，一般无法确定联合分布函数 $F(x,y)$

3.3.1 边沿分布律

定义：

二维离散型随机变量 (X,Y)，分量 X 和分量 Y 都是离散型随机变量， X 的分布律称为 (X,Y) 关于 X 的边沿分布律；Y 的分布律称为 (X,Y) 关于 Y 的边沿分布律；

边沿分布律的计算：

$P\{X=x_i\}=\sum\limits_j p_{ij}=p_i$
(X,Y)关于X的边沿分布律：联合分布律表中各行概率相加。

$P\{Y=y_j\}=\sum\limits_i p_{ij}=p_j$
(X,Y)关于Y的边沿分布律：联合分布律表中各列概率相加.

3.3.2 条件分布律

在已知**一个分量取某一定值**的条件下，**另一个分量的分布律**称为**条件分布律。**

定义

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \qquad i, j=1,2, \ldots$$

(1) 若 $P\{X=x\}>0$

$$P\{Y=y_j|X=x\}=\frac{P\{X=x, Y=y_j\}}{P\{X=x\}} \qquad j=1,2, \ldots$$

称为在 $X=x$ 的条件下，Y 的**条件分布律。**

(2) 若 $P\{Y=y\}>0$

$$P\{X=x_i|Y=y\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y\}}{P\{Y=y\}} \qquad i=1,2, \ldots$$

称为在 $Y=y$ 的条件下，X 的**条件分布律。**

3.4 边缘概率密度和条件概率密度

3.4.1 边沿概率密度

二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$ 则

- (X, Y) 关于 X 的边沿概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$
- (X, Y) 关于 Y 的边沿概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$

3.4.2 条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \qquad (f_Y(y) \neq 0, x \in(-\infty,+\infty))$$
$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x, y)}{f_X(x)} \qquad (f_X(x) \neq 0, y \in(-\infty,+\infty))$$

3.5 相互独立的随机变量

设 X, Y 为两个随机变量，若对任意实数 x, y，有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\}=P\{X \leq x\} \cdot P\{Y \leq y\}$$

则称 X 与 Y 相互独立，简称独立。

3.5.1 离散型随机变量相互独立的判别定理

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{i,j}$$

则 X 与 Y 相互独立的充要条件：

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j$$

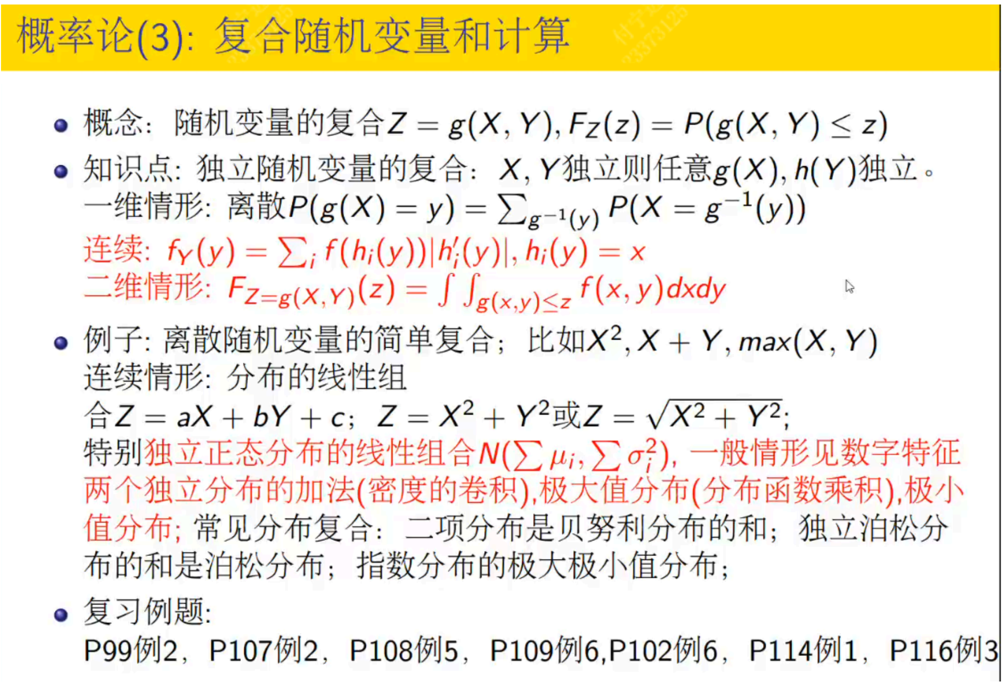
3.5.2 连续型随机变量相互独立的判别定理

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为$f(x, y)$，$f_X(x), f_Y(y)$分别是 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边沿概率密度。

则 X 与 Y 相互独立的充要条件为：

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

第4章 复合随机变量和计算 笔记02的3



画图！

三角形区域(aX+bY+c)、圆形区域($X^2 + Y^2$ $\sqrt{X^2 + Y^2}$)、矩形区域(max min)会积分

求的都是F，看题目，要是求概率密度函数就再求导（**含参变量积分的求导**）

指数分布的最小值分布还是最小值

4.0 例题们

一维离散型随机变量

例 2 已知随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

试求：(1) $2X+1$；(2) X^2-1 的分布律．

解 方法步骤：列表代入计算复合函数值．

X	-1	0	1	2
$2X+1$	-1	1	3	5
X^2-1	0	-1	0	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

(1) $2X+1$ 的分布律为

$2X+1$	-1	1	3	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) X^2-1 的分布律为

X^2-1	-1	0	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

！一维连续 正态分布 概率密度

例 2 已知 $X\sim N(0,\sigma^2)$，求：$Y=|X|$ 的概率密度．

解 由题设条件，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ -\infty<x<+\infty,$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant y\}.$$

当 $y\leqslant 0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant y\}=0;$$

当 $y>0$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant y\}\\&=P\{-y\leqslant X\leqslant y\}=F_X(y)-F_X(-y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=F'_X(y)+F'_X(-y)\\&=f_X(y)+f_X(-y)=2f_X(y),\end{aligned}$$

故 $Y=|X|$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right), & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}.$$

！！一维连续 均匀分布 概率密度

例 5 设随机变量 X 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上服从均匀分布，试求：$Y=\cos X$ 的概率密度．

解 由题设条件可知，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\cos X\leqslant y\}.$$

(1) 当 $y\geqslant 1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\cos X\leqslant y\}=P\{S\}=1.$$

(2) 当 $y<-1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\cos X\leqslant y\}=P(\varnothing)=0.$$

(3) 当 $-1\leqslant y<0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\cos X\leqslant y\}=\int_{\cos x\leqslant y} f(x)\mathrm{d}x=0.$$

(4) 当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{\cos X\leqslant y\}\\&=\int_{\cos x\leqslant y} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos y\right),\end{aligned}$$

此时

$$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ 0\leqslant y<1,$$

所以

$$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0\leqslant y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

！！！一维连续

例 6 已知随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{1}{2}(1+x^3), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$$

求：$Y=2X^2+1$ 的分布函数.

解 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X^2+1\leqslant y\}=P\left\{X^2\leqslant\dfrac{y-1}{2}\right\}$.

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $1\leqslant y\leqslant 3$ 时，

$$F_Y(y)=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leqslant X\leqslant\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}$$
$$=F\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-F\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=\left(\frac{y-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

当 $y>3$ 时，

$$F_Y(y)=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leqslant X\leqslant\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}$$
$$=F\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-F\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=1-0=1.$$

故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \left(\dfrac{y-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, & 1\leqslant y\leqslant 3.\\ 1, & y>3\end{cases}$

二维离散

例 6 设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立且服从相同的(0—1)分布，即 $P\{X_i=1\}=p$，$0<p<1$，$P\{X_i=0\}=q$，$q=1-p$，$i=1,2,3$.

令
$$Y_1=\begin{cases}1, & \text{当 } X_1+X_2 \text{ 为奇数}\\ 0, & \text{当 } X_1+X_2 \text{ 为偶数}\end{cases},$$
$$Y_2=\begin{cases}1, & \text{当 } X_2+X_3 \text{ 为奇数}\\ 0, & \text{当 } X_2+X_3 \text{ 为偶数}\end{cases},$$

试求：$Z_1=2Y_1-Y_2$ 和 $Z_2=\min\{Y_1,Y_2\}$ 的分布律.

解 根据题意和题设条件知 (Y_1,Y_2) 的值为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(0,0)$，$(0,1)$；Z_1 的可能取值为 $2,1,0,-1$. 则

$$\begin{aligned}\{Z_1=2\}&=\{Y_1=1,Y_2=0\}\\&=\{X_1+X_2\text{ 为奇数},X_2+X_3\text{ 为偶数}\}\\&=\{\{X_1=1,X_2=0\}+\{X_1=0,X_2=1\},\{X_2=1,X_3=1\}+\\&\quad\{X_2=0,X_3=0\}\}\\&=\{X_1=1,X_2=0,X_3=0\}+\{X_1=0,X_2=1,X_3=1\},\end{aligned}$$
$$P\{Z_1=2\}=P\{Y_1=1,Y_2=0\}=pq^2+qp^2=pq;$$

$$\begin{aligned}\{Z_1=1\}&=\{Y_1=1,Y_2=1\}\\&=\{X_1+X_2\text{ 为奇数},X_2+X_3\text{ 为奇数}\}\\&=\{\{X_1=1,X_2=0\}+\{X_1=0,X_2=1\},\{X_2=0,X_3=1\}+\\&\quad\{X_2=1,X_3=0\}\}\\&=\{X_1=1,X_2=0,X_3=1\}+\{X_1=0,X_2=1,X_3=0\},\end{aligned}$$
$$P\{Z_1=1\}=P\{Y_1=1,Y_2=1\}=p^2q+q^2p=pq;$$

$$\begin{aligned}\{Z_1=0\}&=\{Y_1=0,Y_2=0\}\\&=\{X_1+X_2\text{ 为偶数},X_2+X_3\text{ 为偶数}\}\\&=\{\{X_1=1,X_2=1\}+\{X_1=0,X_2=0\},\{X_2=1,X_3=1\}+\\&\quad\{X_2=0,X_3=0\}\}\\&=\{X_1=1,X_2=1,X_3=1\}+\{X_1=0,X_2=0,X_3=0\},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P\{Z_1=0\}&=P\{Y_1=0,Y_2=0\}\\&=p^3+q^3=(p+q)^3-(3p^2q+3pq^2)=1-3pq;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{Z_1=-1\}&=\{Y_1=0,Y_2=1\}\\&=\{X_1+X_2\text{ 为偶数},X_2+X_3\text{ 为奇数}\}\\&=\{\{X_1=1,X_2=1\}+\{X_1=0,X_2=0\},\{X_2=1,X_3=0\}+\\&\quad\{X_2=0,X_3=1\}\}\\&=\{X_1=1,X_2=1,X_3=0\}+\{X_1=0,X_2=0,X_3=1\},\end{aligned}$$
$$P\{Z_1=-1\}=P\{Y_1=0,Y_2=1\}=p^2q+q^2p=pq.$$

于是，$Z_1=2Y_1-Y_2$ 的分布律为

Z_1	-1	0	1	2
P	pq	$1-3pq$	pq	pq

$$P\{Z_2=1\}=P\{Y_1=1,Y_2=1\}=pq,$$
$$\begin{aligned}P\{Z_2=0\}&=P(\{Y_1=0,Y_2=0\}+\{Y_1=0,Y_2=1\}+\{Y_1=1,Y_2=0\})\\&=1-pq.\end{aligned}$$

于是，$Z_2=\min\{Y_1,Y_2\}$ 的分布律为

Z_2	0	1
P	$1-pq$	pq

！！！二维连续 $X+Y$

例 1 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x+y), & 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：$Z=X+Y$ 的概率密度.

解 如图 4.4 所示.

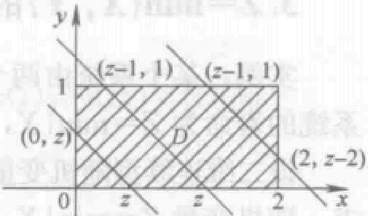


图 4.4

首先，画出使 $f(x, y) \neq 0$ 的区域 D.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \mathrm{d}x$$

$$=\int_{AB} f(x, y) \mathrm{d}x,$$

$$x=x, \quad y=z-x.$$

(1) 当 $z<0$ 或 $z>3$ 时，直线 AB 与区域 D 不相交，在直线 AB 上，$f(x, y)=0$，所以 $f_Z(z)=0$；

(2) 当 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{AB} f(x, y) \mathrm{d}x=\int_0^z \frac{1}{5}[2x+(z-x)] \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z \frac{1}{5}(x+z) \mathrm{d}x=\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}(x+z)^2 \Big|_0^z$$

$$=\frac{3}{10} z^2;$$

(3) 当 $1<z \leqslant 2$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{AB} f(x, y) \mathrm{d}x=\int_{z-1}^z \frac{1}{5}[2x+(z-x)] \mathrm{d}x$$

$$=\int_{z-1}^z \frac{1}{5}(x+z) \mathrm{d}x=\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}(x+z)^2 \Big|_{z-1}^z$$

$$=\frac{1}{10}(4z-1);$$

(4) 当 $2<z \leqslant 3$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{AB} f(x, y) \mathrm{d}x$$

$$=\int_{z-1}^2 \frac{1}{5}[2x+(z-x)] \mathrm{d}x$$

$$=\int_{z-1}^2 \frac{1}{5}(x+z) \mathrm{d}x=\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}(x+z)^2 \Big|_{z-1}^2$$

$$=\frac{1}{10}(3+8z-3z^2).$$

即得 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{10} z^2, & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ \frac{1}{10}(4z-1), & 1<z \leqslant 2 \\ \frac{1}{10}(3+8z-3z^2), & 2<z \leqslant 3 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

！！！二维连续 MAX MIN

例 3 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求：分布函数$F(x, y)$，边缘分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$；

(2) 求：$Z=\max\{X, Y\}$的概率密度；

(3) 求：$Z=\min\{X, Y\}$的概率密度．

解 (1) $F(x, y)=\iint\limits_{\substack{u\leqslant x\\ v\leqslant y}} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

画出各种情况的积分区域，结合被积函数不为零的取值范围定出有效积分限（见图 4.5).

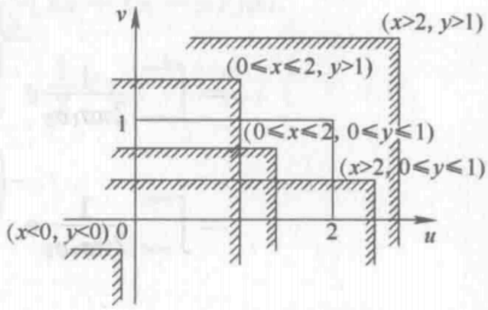


图 4.5

ⅰ) 当$x<0$或$y<0$时，

$f(x, y)\equiv 0$, $F(x, y)=0$.

ⅱ) 当$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 1$时，

$$F(x, y)=\int_0^x\left[\int_0^y\frac{1}{5}(2u+v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^x\left(2uy+\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right).$$

ⅲ）当 $x>2$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int_0^2\left[\int_0^y\frac{1}{5}(2u+v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{5}\int_0^2\left(2uy+\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{5}(4y+y^2).\end{aligned}$$

ⅳ）当 $0\leqslant x\leqslant 2$，$y>1$ 时，

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int_0^x\left[\int_0^1\frac{1}{5}(2u+v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{5}\int_0^x\left(2uv+\frac{1}{2}v^2\right)\Big|_0^1\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{5}\int_0^x\left(2u+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{5}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right).\end{aligned}$$

ⅴ）当 $x>2$，$y>1$ 时，$F(x,y)=1$.

所以

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0\\ \frac{1}{5}\left(x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right), & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ \frac{1}{5}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right), & 0\leqslant x\leqslant 2,\ y>1\\ \frac{1}{5}(4y+y^2), & x>2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ 1, & 2<x,\ 1<y\end{cases},$$

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{5}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{5}(y^2+4y), & 0\leqslant y\leqslant 1.\\ 1, & y>1\end{cases}$$

(2) $F_{\max}(z)=F(z,z)=F(x,y)\Big|_{\substack{x=z\\y=z}}=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{10}z^3, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \dfrac{1}{5}\left(z^2+\dfrac{1}{2}z\right), & 1<z\leqslant 2\\ 1, & 2<z\end{cases}$.

注意：取值 $x=z$，$y=z$，仅取直线 $y=x$ 经过的点上的值，直线 $y=x$ 不经过的点取不到.

故

$$f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{9}{10}z^2, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \dfrac{1}{5}\left(2z+\dfrac{1}{2}\right), & 1<z\leqslant 2\\ 0, & z>2\end{cases}.$$

(3) $F_X(z)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(z,y)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{1}{5}\left(z^2+\dfrac{1}{2}z\right), & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 1, & 2<z\end{cases}$

$$F_Y(z)=\lim_{x\to+\infty}F(x,z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{1}{5}(z^2+4z), & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ 1, & z>1\end{cases}$$

$$F_{\max}(z)=F(z,z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{10}z^3, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \dfrac{1}{5}\left(z^2+\dfrac{1}{2}z\right), & 1<z\leqslant 2\\ 1, & z>2\end{cases},$$

$$F_{\min}(z)=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{2}{5}z^2+\dfrac{9}{10}z-\dfrac{3}{10}z^3, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ 1, & z>1\end{cases}$$

故
$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{4}{5}z+\dfrac{9}{10}-\dfrac{9}{10}z^2, & 0\leqslant z\leqslant 1.\\ 0, & z>1\end{cases}$$

第（2）问和第（3）问的另一种解法如下．

(2) $F_{\max}(z)=\iint\limits_{\substack{x\leqslant z\\ y\leqslant z}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．（见图 4.6）

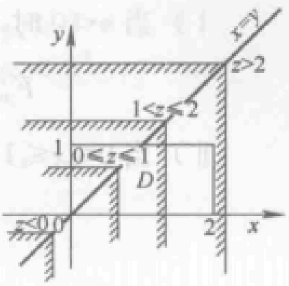


图 4.6

（注意有效积分区域及变化）．

ⅰ）当 $z<0$ 时，$F_{\max}(z)=0$；

ⅱ）当 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时，

$$F_{\max}(z)=\int_0^z\left[\int_0^z \frac{1}{5}(2x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^z\left(2xz+\frac{1}{2}z^2\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{10}z^3\text{；}$$

ⅲ）当 $1<z\leqslant 2$ 时，

$$F_{\max}(z)=\int_0^z\left[\int_0^1 \frac{1}{5}(2x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^z\left(2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}z^2+\frac{1}{10}z\text{；}$$

ⅳ）当 $z>2$ 时，

$$F_{\max}(z)=\int_0^2\left[\int_0^1 \frac{1}{5}(2x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^2\left(2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x\right)\Big|_0^2=1\text{，}$$

即得

$$F_{\max}(z)=\iint\limits_{\substack{x\leqslant z\\ y\leqslant z}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{10}z^3, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \dfrac{1}{5}\left(z^2+\dfrac{1}{2}z\right), & 1<z\leqslant 2\\ 1, & z>2\end{cases}.$$

故

$$f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{9}{10}z^2, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \dfrac{1}{5}\left(2z+\dfrac{1}{2}\right), & 1<z\leqslant 2\\ 0, & z>2\end{cases}$$

(3) 如图 4.7 所示，$F_{\min}(z)=P\{Z\leqslant z\}$

$$=P\{\min(X,Y)\leqslant z\}$$

$$=1-\iint\limits_{\substack{x>z\\ y>z}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

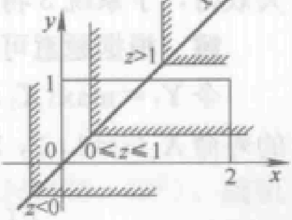


图 4.7

ⅰ）当 $z<0$ 时，

$$F_{\min}(z)=1-\int_0^2\left[\int_0^1\frac{1}{5}(2x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=0\ ;$$

ⅱ）当 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=1-\int_z^2\left[\int_z^1\frac{1}{5}(2x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=1-\frac{1}{5}\int_z^2\left[2x(1-z)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2\right]\mathrm{d}x\\&=1-\frac{1}{5}\left[(1-z)(4-z^2)+\frac{1}{2}(1-z^2)(2-z)\right]\\&=-\frac{3}{10}z^3+\frac{2}{5}z^2+\frac{9}{10}z\ ;\end{aligned}$$

ⅲ）当 $z>1$ 时，$F_{\min}(z)=1$，即

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\min(X,Y)\leqslant z\}\\&=1-P\{X>z,Y>z\}\\&=1-\iint\limits_{\substack{x>z\\y>z}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{2}{5}z^2+\frac{9}{10}z-\frac{3}{10}z^3, & 0\leqslant z\leqslant 1\ ,\\ 1, & 1<z\end{cases}\end{aligned}$$

故

$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{4}{5}z+\frac{9}{10}-\frac{9}{10}z^2, & 0\leqslant z\leqslant 1.\\ 0, & 1<z\end{cases}$$

4.1 离散型随机变量的函数分布

4.1.1 一维离散型随机变量的函数分布律

定理

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,\ldots$$

1. 若对于 X **的不同取值** x_i，$Y=g(X)$ 的取值 $g(x_i)=y_i$ **也不同**，则随机变量 $Y=g(X)$ 的分布律为：

$$P\{Y=y_i\}=P\{g(X)=g(x_i)\}=P\{X=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

2. 若对于 X 的**有限个或可列无穷多个不同的取值** x_{i_k}，有 $g(x_{i_1})=g(x_{i_2})=\cdots=y^*$，则有

$$P\{Y=y^*\}=P\{g(X)=y^*\}=\sum_k P\{X=x_{i_k}\}$$

4.1.2 二维离散型随机变量的函数分布律

定理

设离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

1. 若对于 (X, Y) 的**不同取值** (x_i, y_i)，随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的取值 $g(x_i, y_j)$ **也不同**，则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为：

   $$P\{Z = z_{ij}\} = p\{g(X, Y) = g(x_i, y_j)\} = p\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1,$$

2. 对于 (X, Y) 的**有限个或可列无穷多个不同取值**(x_{i_k}, y_{j_k})，有$g(x_{i_k}, y_{j_k}) = z^*$，则

   $$P\{Z = z^*\} = P\{g(X, Y) = z^*\} = \sum_k P\{X = x_{i_j}, Y = y_{j_k}\}$$

4.2 一维连续型随机变量的函数分布

定理

一般方法如下．记

$$D_y = \{x \mid g(x) \leqslant y\} = \{x \mid g(x) \in (-\infty, y]\} = g^{-1}\{(-\infty, y]\},$$

则随机变量 $Y = g(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{g(X) \leqslant y\} = P\{X \in D_y\} = \int_{D_y} f(x)\mathrm{d}x.$$

对分布函数求导数得到概率密度

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y).$$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，函数 $y = g(x)$ 在区间 (a, b) 上**严格单调**，其反函数 $x = h(y)$，有连续导数，则 $Y = g(X)$ 是一个连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f[h(y)] \cdot |h'(y)|, & y \in (c, d) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 (c, d) 为 $y = g(x)$ 的值域。

$y = g(x)$ 在区间 (a, b) 上严格单调**递增**，$h'(y) > 0$

$y = g(x)$ 在区间 (a, b) 上严格单调**递减**，$h'(y) < 0$

若函数 $y=g(x)$ **不是严格单调的**，但是在**不相重叠的区间** $I_1, I_2, ...$ **上逐段严格单调**，其**反函数**分别为 $h_1(y), h_2(y), ...$，而且 $h_1'(y), h_2'(y), ...$均**连续**，则$Y=g(X)$ 是一个连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f[h_1(y)]\cdot|h_1'(y)|+f[h_2(y)]\cdot|h_2'(y)|+\cdots, & y\in I^* \\ 0, & y\notin I^* \end{cases}$$

其中，I^* 是使得 $h_1'(y), h_2'(y), ...$ 连续的 y 的集合。

4.3 二维连续型随机变量的函数分布

一般方法：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz} \quad F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,du$$

几个具体函数的分布：

- $Z=X+Y$ 的分布
- $Z=\max(X,Y)$ 的分布
- $Z=\min(X,Y)$ 的分布

4.3.1 $Z=X+Y$ 的分布

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 是连续型随机变量。

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$
$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,du$$

- 设 $S=X_1+X_2+...+X_n$，假设随机变量互相独立，则 $f(S)=f(X_1)*f(X_2)*...*f(X_n)$
  - X_i 是两点分布 $B(1,p)$，则 S 是二项分布 $B(n,p)$
  - X_i 是几何分布，则 S 是负二项分布 $NB(n,p)$
  - X_i 是泊松分布 $P(\lambda_i)$，则 S 是泊松分布 $P(\sum_i \lambda_i)$
  - X_i 是指数分布，则 S 是二项分布 $\Gamma(n,\lambda)$
  - X_i 是**正态分布** $N(\mu_i,\sigma_i)$，则 S 是二项分布 $N(\sum\mu_i,\sum\sigma_i^2)$
    - $$Z=\sum_{i=1}^{n}k_iX_i+b\sim N(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i+b,\ \sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2)$$

4.3.2 $Z=\max(X,Y)$ 的分布

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，分布函数为 $F(x,y)$，对任意实数 z，
$Z=\max(X,Y)$ 的分布函数

$$F_{\max}(z)=F(z,z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f(x,y)\,dxdy$$

$Z=\max(X,Y)$ 的概率密度

$$f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)$$

4.3.3 $Z=\min(X,Y)$ 的分布

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，分布函数为 $F(x,y)$，对任意实数 z，
$Z=\min(X,Y)$ 的分布函数

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)=&1-\int_{z}^{+\infty}\int_{z}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy\\ =&F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)\end{aligned}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的概率密度

$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)$$

4.3.4 旋转不变的随机变量$Z=X^2+Y^2$, $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$

1. 极坐标变换 $X=Rcos\theta,Y=Rsin\theta$，有 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$，$\theta=arctan(y/x)$
2. 设 $Z=g(R)$，则
   $F_Z(z)=P(g(R)\le z)=\iint_{g(R)\le z} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{g^{-1}(z)} f(r,\theta)r\,drd\theta$

第56章 数字特征和极限定理 笔记03的5 6

概率论(4): 数字特征和极限定理

- 概念: EX, DX, $Cov(X,Y)$, $\rho(X,Y)$,不相关，独立，大数定律(依概率收敛)，中心极限定理(依分布收敛)
- 知识点:$E(g(X)) = \int g(x)f(x)dx$;
  线性$E(X+Y) = EX + EY$,$EXY = EXEY$(独立);
  $D(X+Y) = DX + DY + 2Cov(X,Y)$;特别独立时$Cov(X,Y) = 0$
  $(EXY)^2 \le EX \cdot EY$, 柯西施瓦茨不等式及两个变形见150页
  马尔科夫不等式，切比雪夫不等式
- 例子: 所有常见分布的期望与方差P138-141; 常见分布的复合的期望;
  正态分布的高阶矩计算153页(注:密度函数为偶函数的期望(一阶矩)为零,奇数矩为零);正态随机变量的绝对值分布和特征$|X-\mu|$P107,154 ,二维正态分布的相关系数ρ;
- 复习例题: P131 例6 , P133 例8, P142例7, P149 例5, P153例1, P157例2, P163例1,2, P168例4,

重要！！！！！！！！！

绝对值分布，分部积分

5.0 例题们

正态分布的高阶矩计算

例 1 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求：$E(X-EX)^k$，k 为正整数．

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 知 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$E(X-EX)^k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

此积分对任意正整数 k 收敛．

当 k 为奇数时，被积函数为奇函数，此时 $E(X-EX)^k=0$；

标准正态分布的概率密度函数积分为1

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$$

当 k 为偶数时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^k e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}t^{k-1}(-e^{-\frac{t^2}{2}})'\mathrm{d}t$$

$$=(k-1)\int_{-\infty}^{+\infty}t^{k-2}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=(k-1)\cdot(k-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=(k-1)\cdot(k-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{2\pi},$$

于是 $\quad E(X-EX)^k=\sigma^k\cdot(k-1)\cdot(k-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1.$

特别地，$E(X-EX)^2=\sigma^2$，$E(X-EX)^4=3\sigma^4$，$E(X-EX)^6=15\sigma^6$．

正态随机变量的绝对值分布和特征 $|X-\mu|$

例 3 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求：$E|X-\mu|^3$.

解 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

$$E|X-\mu|^3=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|^3 f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|^3\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=t} \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^3 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}2\int_0^{+\infty}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}d(t^2)$$

$$=\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y}{2}}dy=\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}y(-2e^{-\frac{y}{2}})'dy=\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}2e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}(-4e^{-\frac{y}{2}})'dy=4\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma^3.$$

随机向量的函数的数学期望

例 6 设随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $G: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2$ 内服从均匀分布，求：$E(\sin^2X\cdot\cos Y)$.

解 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$$E(\sin^2X\cdot\cos Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2x\cdot\cos y\cdot f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^2\sin^2x\cdot\cos y\cdot\frac{1}{2}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sin^2x dx\cdot\int_0^2\cos y dy$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\cdot\int_0^1\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\right).$$

！！！离散型随机变量 X 的数学期望

例 8 将 n 只球放入 M 个盒子中去，每只球落入各个盒子是等可能的（每盒容纳球的个数不限），求：有球的盒子数 X 的数学期望．

解 设 $\{X_i=1\}$ = "第 i 个盒子中有球"，$\{X_i=0\}$ = "第 i 个盒子中无球"，$i=1, 2, \cdots, M$. 则

$$X=\sum_{i=1}^{M} X_i.$$

而 $P\{X_i=0\}=\dfrac{(M-1)^n}{M^n}$,

$$P\{X_i=1\}=1-P\{X_i=0\}=1-\frac{(M-1)^n}{M^n},$$

所以

$$\begin{aligned} EX_i &= 1\cdot P\{X_i=1\}+0\cdot P\{X_i=0\} \\ &= 1-\frac{(M-1)^n}{M^n}, \end{aligned}$$

故

$$EX = E\Big(\sum_{i=1}^{M} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{M} EX_i = M\Big[1-\frac{(M-1)^n}{M^n}\Big].$$

正态分布的复合的期望方差

例 7 已知随机变量 X_1，X_2，X_3，X_4 相互独立，且都服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，求：$Y_1=X_1+X_2-2\mu$ 与 $Y_2=X_3-X_4$ 的联合概率密度．

解 由题设条件知，Y_1，Y_2 相互独立，且 Y_1，Y_2 都服从正态分布．由于 $EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，$i=1, 2, 3, 4$，所以

$$\begin{aligned} &EY_1=EX_1+EX_2-2\mu=\mu+\mu-2\mu=0, \\ &DY_1=DX_1+DX_2=2\sigma^2, \\ &EY_2=EX_3-EX_4=\mu-\mu=0, \\ &DY_2=D(X_3-X_4)=DX_3+DX_4=2\sigma^2, \end{aligned}$$

于是 $Y_1\sim N(0,2\sigma^2)$，$Y_2\sim N(0,2\sigma^2)$，

$$f_{Y_1}(y_1)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}},$$

$$f_{Y_2}(y_2)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}},$$

故得 Y_1 与 Y_2 的联合概率密度为

$$f(y_1, y_2)=f_{Y_1}(y_1)\cdot f_{Y_2}(y_2)=\frac{1}{4\pi\sigma^2}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{4\sigma^2}}, \quad -\infty<y_1, y_2<+\infty.$$

离散随机向量的数学期望

例 5 接连不断地掷一颗骰子，直到出现点数小于 5 点为止，以 X 表示最后一次掷出的点数，以 Y 表示掷骰子的次数．

（1）证明：X 与 Y 相互独立；

（2）求：EX，EY，$E(XY)$.

解 （1）由

$$P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

可知

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\},\ i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots,$$

所以 X 与 Y 相互独立．

$$(2)\ EX=\sum_{i=1}^{4}iP\{X=i\}=(1+2+3+4)\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2},$$

$$EY=\sum_{j=1}^{+\infty}jP\{Y=j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}j\,\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{+\infty}j\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{2},$$

由于 X 与 Y 相互独立，所以

$$E(XY)=EX\cdot EY=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}.$$

5.1 数学期望

5.1.1 离散型随机变量 X 的数学期望

定义

设 X 的分布律为：$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\ldots$若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ **绝对收敛**（即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k$ 收敛）

则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 为 X 的数学期望，记为

$$E(X)=EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$$

5.1.2 离散型随机变量 X 的函数的数学期望

定理

设 $Y=g(X)$，$g(x)$ 是连续函数，随机变量 X 是离散型随机变量，$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\ldots$若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有

$$EY=Eg(X)=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

5.1.3 连续型随机变量 X 的数学期望

定义

设 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$ **绝对收敛**（即$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx$ 收敛）,则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$ 为 X 的数学期望，记为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

5.1.4 连续型随机变量 X 的函数的数学期望

定理

设 $Y=g(X)$，$g(x)$ 是连续函数，随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$ 绝对收敛，则随机变量 $Y=g(X)$ 的数学期望

$$EY=Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$$

5.1.5 随机向量的函数的数学期望

设 (X,Y) 为随机向量，$g(x,y)$ 为连续函数，那么 $Z=g(X,Y)$ 是一个随机变量。

- 若 (X,Y) 为离散型随机变量，其分布律为

  $$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots$$

  则有

  $$E(Z)=Eg(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

  其中 $E(Z)=Eg(X,Y)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛。

- 若 (X,Y) 为连续型，其概率密度为 $f(x,y)$，则有

$$E(Z)=Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot f(x,y)\,dxdy$$

其中上式绝对收敛。

边缘分布的期望：特别的，令 $Z=X$，有 $EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=EX$，即边缘分布的期望，类似令 $Z=Y$ 可得 EY。所以可以定义随机向量的期望是一个向量 (EX,EY)。类似有 n 维向量的期望即n 个边缘分布的期望向量。

5.1.6 数学期望的性质

1. 设 C 为常数，则有 $E(C)=C$
2. 设 C 为常数，X 为随机变量，则有 $E(CX)=C\cdot EX$
3. 设 X,Y 为任意随机变量，则 $E(X+Y)=EX+EY$
4. 设 X,Y 为**相互独立**的随机变量，则有 $E(XY)=EX\cdot EY$

5.2 方差

5.2.1 定义

若 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则称其为随机变量 X 的方差，记为 $D(X)$ 或 $Var(x)$，即：

$$D(X)=E[X-E(X)]^2\geq 0$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**均方差**或**标准差**

5.2.2 方差的计算公式

方差 $DX=E(X-EX)^2$，是 X 的函数 $(X-EX)^2$ 的数学期望。

1. 若 X 是**离散**型随机变量，分布律为：

$$P\{X=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,\dots$$

则：

$$DX=E(X-EX)^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-EX)^2p_i\geq 0$$

2. 若 X 是**连续**型随机变量，概率密度为 $f(x)$，则

$$DX=E(X-EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)\,dx>0$$

3. **简便**计算公式

$$
\begin{aligned}
DX &= EX^2 - (EX)^2 \\
EX^2 &= DX + (EX)^2
\end{aligned}
$$

5.2.3 方差的性质

1. 设 C 为常数，则有 $D(C) = 0$
2. 设 k 为常数，X 为随机变量，则有：

$$D(kX) = k^2 DX$$

3. ! $D(X+Y) = DX + DY + 2cov(X, Y)$
4. 设 X, Y 为**相互独立**的随机变量，则有

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= DX + DY \\
D(X-Y) &= DX + DY \\
D(XY) &= E(XY)^2 - [E(XY)]^2 \\
&= EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2 \cdot (EY)^2
\end{aligned}
$$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为相互独立的随机变量，则有

$$D(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 DX_i$$

5. $DX = 0 \iff P\{X = EX\} = 1$

5.3 常用随机变量的数学期望和方差

5.3.1 (0-1)分布，$X \sim B(1, p)$

$$
\begin{aligned}
EX &= p \\
DX &= p(1-p)
\end{aligned}
$$

5.3.2 二项分布，$X \sim B(n, p)$

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$
\begin{aligned}
EX &= np \\
DX &= np(1-p)
\end{aligned}
$$

5.3.3 泊松分布，$X \sim \Pi(\lambda)$

$$P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$EX = \lambda$$
$$DX = \lambda$$

5.3.4 几何分布

$EX = \frac{1}{p}, DX = \frac{q}{p^2}$

5.3.5 超几何分布 $Y \sim H(N, M, n, k)$

按概率模型，超几何分布是n次无放回抽取到次品个数的概率分布，由抽签原理每次抽到次品服从两点分布 $B(1, p)$，其中 $p = \frac{M}{N}$，显然 $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$，$X_k \sim B(1, p)$，但 X_k 互相不独立。

已知$EX_k = p, DX_k = p(1-p), 1 \le k \le n$

故有 $EY = nEX_k = np$。

由和的方差公式有 $DY = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

5.3.6 均匀分布，$X \sim U[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$
$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.3.7 指数分布，$X \sim e(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda} DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

5.3.8 正态分布 $X \sim (\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$EX = \mu DX = \sigma^2$$

定理1：正态分布的性质

1. 设$(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，则

$$
\begin{aligned}
X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \\
EX_i=\mu_i,\quad DX_i=\sigma_i^2
\end{aligned}
$$

2. X_1,X_2 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

$$
\begin{aligned}
Z=k_1X_1+k_2X_2+b &\sim N(EZ,DZ) \\
&\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2+b,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2)
\end{aligned}
$$

3. $DX^n=(n-1)(n-3)(n-5)\dots1\sigma^n$

定理2：

设随机变量 $X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1},X_{n+2},\dots,X_{n+m}$ 相互独立，$g(x_1,x_2,\dots,x_n),h(y_1,y_2,\dots,y_m)$ 是连续函数，设

$$
\begin{aligned}
Y_1=g(X_1,X_2,\dots,X_n) \\
Y_2=h(X_{n+1},X_{n+2},\dots,X_{n+m})
\end{aligned}
$$

则 Y_1,Y_2 相互独立

5.4 协方差和相关系数

5.4.1 协方差

定义

称数值 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 为随机变量 X 与 Y 的协方差，记作 $Cov(X,Y)$ ，即

$$
Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]
$$

- 协方差为正，正相关
- 协方差为负，负相关
- 协方差为0，零相关
- 协方差绝对值越大，两个变量同或反向程度也越大

常用计算公式

$$
Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY
$$

协方差的性质

1. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2. $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

3. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
4. $Var(\sum X_i)=Var(X_i)+\sum\sum_{i\neq j} cov(X_i,X_j)$
5. 若 X,Y 相互独立，$Cov(X,Y)=0$，**逆命题不成立**
6. $D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$

   $D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)$

5.4.2 相关系数

定义

称数值 $\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$ $DX,DY\neq 0$ 为随机变量 X 与 Y 的**相关系数**或**标准协方差**，记作 ρ_{XY} 或简记作 ρ，即：

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=Cov(X^*,Y^*)$$

若 X,Y 的相关系数 $\rho=0$，则称 X,Y **不相关**

引入标准化随机变量 $U_X=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X},U_Y=\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$，则 $\rho(X,Y)=E(U_XU_Y)$

定理

若 X,Y 相互独立，则

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=0\\ \rho_{XY}&=0\end{aligned}$$

即：

- X,Y 相互独立 $\Rightarrow$ X,Y 不相关
- X,Y 不相关 **不一定** X,Y 相互独立
- 特殊情况：对**二维正态**分布，X,Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ X,Y 不相关

性质

1. $|\rho|\leq 1$
2. $|\rho|=1 \iff P\{Y=aX+b\}=1$，其中 a,b 是常数，且 $a\neq 0$，X,Y 之间以概率 1 存在线性关系

相关系数 ρ 刻画了随机变量 X,Y 之间的线性关系的近似程度。

$|\rho|$ 越接近1，X,Y 越接近线性关系。

柯西不等式

设 X, Y 为任意随机变量，则

1. $[E(XY)^2] \le E(X^2) \cdot E(Y^2)$
2. 等式成立 $\Leftrightarrow$ 存在常数 t_0，使得 $P\{Y = t_0 X\} = 1$

定理

设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2; \rho)$

$$Cov(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$$
$$\rho_{XY} = \rho$$

- $\rho_{XY} = \rho = 0 \iff X, Y$ 不相关
- $\rho = 0 \iff X, Y$ 相互独立

5.5 矩、协方差矩阵

5.5.1 矩

矩是一些数字特征的泛称或总称。

定义

设 X, Y 是随机变量，

- 若 $E(X^k), k = 1, 2, \ldots$ 存在，则称它为 X 的 k 阶**原点矩**
- 若 $E(X - EX)^k, k = 1, 2, \ldots$ 存在，则称它为 X 的 k 阶**中心矩**

数学期望 $EX = EX^1$ 是一阶原点矩
方差 $DX = E(X - EX)^2$ 是二阶中心矩

此外，定义：

- $E(X^k Y^l) \quad (k + l)$ 阶原点混合矩
- $E[(X - EX)^k (Y - EY)^l] \quad (k + l)$ 阶中心混合矩
- $E|X|^k \quad k$ 阶原点绝对矩
- $E|X - EX|^k \quad k$ 阶中心绝对矩

5.5.2 协方差矩阵

定义

对于 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，

若 $C_{ij}=Cov(X_i,X_j)=E[(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)] \quad i,j=1,2,\ldots,n$ 存在

则矩阵 $C=(C_{ij})_{n\times n}$ 称为 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 的**协方差矩阵**

协方差矩阵 $C=(C_{ij})_{n\times n}$ 是**一个对称矩阵。**

二维正态随机变量 (X_1,X_2)

若令

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$$

(X_1,X_2) 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}
C&=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2&\rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{pmatrix}\\
C^{-1}&=\frac{1}{\det C}\begin{pmatrix}\sigma_2^2&-\rho\sigma_1\sigma_2\\-\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_1^2\end{pmatrix}\\
\det C&=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
&(X-U)'C^{-1}(X-U)\\
=&\frac{1}{\det C}(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2)\begin{pmatrix}\sigma_2^2&-\rho\sigma_1\sigma_2\\-\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2\mu_2\end{pmatrix}\\
=&-\frac{1}{1-\rho^2}[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2}+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2]
\end{aligned}$$

于是 (X_1,X_2) 的概率密度可写成

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-U)'C^{-1}(X-U)\}$$

n 维正态随机变量 $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det C}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-U)'C^{-1}(X-U)\}$$

其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}EX_1\\EX_2\\\vdots\\EX_n\end{pmatrix},\quad C=(C_{ij})_{n\times n}$$

6.0 例题们

马尔科夫不等式

例 2 设有随机序列$\{X_n\}$和随机变量 X，如果$\lim\limits_{n\to\infty}E|X_n-X|^2=0$，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0.$$

证明 因为对任意 $\varepsilon>0$，有

$$0\leqslant P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{E|X_n-X|^2}{\varepsilon^2}$$

成立，利用条件$\lim\limits_{n\to\infty}E|X_n-X|^2=0$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0$ 成立．

数分？

例 1 设随机变量 X_n 的概率密度为

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2},\ -\infty<x<+\infty,$$

分布函数为 $F_n(x)$，求：$\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)$.

解 $$\lim_{n\to+\infty}F_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}f_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{nx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0\,.\\ 0, & x<0\end{cases}$$

依概率收敛

例 2 设随机变量 X_n 的概率密度为

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2},\ -\infty<x<+\infty,$$

试证：$X_n \xrightarrow{P} 0\ (n\to+\infty)$.

证明 对任意 $\varepsilon>0$，由于

$$\begin{aligned}P\{|X_n|\geqslant\varepsilon\}&=\int_{|x|\geqslant\varepsilon}f_n(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_{\varepsilon}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=2\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\\&=2\int_{n\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\to 0\quad(n\to+\infty),\end{aligned}$$

所以 $X_n \xrightarrow{P} 0\ (n\to+\infty)$.

6.1 马尔科夫不等式和切比雪夫不等式

6.1.1 柯西施瓦茨不等式

- 柯西施瓦茨不等式 $|EXY|\le\sqrt{EX^2}\sqrt{EY^2}$
- 协方差不等式：$cov(X,Y)\le\sqrt{DXDY}$ 特别 $|\rho(X,Y)|\le 1$
  $cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)\le\sqrt{E(X-EX)^2E(Y-EY)^2}=\sqrt{D}$
- 三角不等式：$\sqrt{E(X+Y)^2}\le\sqrt{EX^2}+\sqrt{EY^2}$

6.1.2 马尔科夫不等式

设随机变量 X 存在 $E|X|^k$，$k>0$，则对任意 $\varepsilon>0$，成立：

$$P\{|X|\ge\varepsilon\}\le\frac{E|X|^k}{\varepsilon^k}\quad k>0$$

$$P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}\le\frac{E|X-EX|^k}{\varepsilon^k}\quad k>0$$

6.1.3 切比雪夫不等式

设随机变量 X 存在 EX 和 DX，则对任意 $\varepsilon>0$，成立：

$$P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

固定 ε 时，DX 越小，$P\{|X-EX|\ge\varepsilon\}$ 越小

常数随机变量

- **常数随机变量**：取值固定的随机变量，$EX=\mu, DX=0$，则有 $P\{X=EX\}=1$
- 推论
  - $E(|X|)=0 \to P(X=0)=1$
  - $DX=0 \to P(X=EX)=1$
  - $\rho(X,Y)=\pm 1 \to P(Y=aX+b)=1$

6.2 大数定律（依概率收敛）

6.2.1 定义

- 依次列出可数无穷多个随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 简记为 $\{X_n\}$，称为**随机（变量）序列。均值随机变量** $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

- 对于随机（变量）序列 $\{X_n\}$ 和随机变量 X（或常数 a），若对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} P\{|X_n-a|\geq\varepsilon\}=0$$

  则称随机（变量）序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛**于 X（或常数 a），简记为：

$$X_n \xrightarrow{P} X,(n\to\infty) \quad \text{或} \quad X_n \xrightarrow{P} a,(n\to\infty)$$

- 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X，设随机变量序列 $\{Y_n\}$ 依概率收敛于 Y，则有 $\{X_n+Y_n\}$ **依概率收敛**于 $X+Y$

- 设有随机变量序列 $\{X_n\}$，令 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，如果

  $Y_n-EY_n \xrightarrow{P} 0 \quad (n\to\infty)$，则称该随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律

- 设随机变量序列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 独立同分布，且存在有限的数学期望和方差，即 $EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2, i=1,2,\ldots$，记

  $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则有
  - $\overline{X} \xrightarrow{P} \mu \quad (n\to+\infty)$
  - $A_2 \xrightarrow{P} \sigma^2+\mu^2 \quad (n\to+\infty)$
  - $\overline{X^2} \xrightarrow{P} \mu^2 \quad (n\to+\infty)$

- $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \quad (n \to +\infty)$

6.2.2 切比雪夫弱大数定律

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是**相互独立**的随机变量序列。每一个 X_i 都有**有限的方差**，且方差有**公共的上界**，即 $D(X_i) \le C, i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

令 $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ，则有

- $lim_{n\to\infty} DY_n = 0$
- 对任意 $\varepsilon > 0$，$lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - EY_n| < \varepsilon\} = 1$ 成立

6.2.3 辛钦弱大数定律

若随机变量序列**相互独立**，存在**相同的数学期望和方差**
$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2 \quad (i = 1, 2, \ldots)$
则对任意 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} = 1$
其中$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

6.2.4 伯努利弱大数定律

设 n_A 是 n 次**独立重复试验**中事件 A 发生的次数， p 是在每次试验中事件 A 发生的概率，则对任意 $\varepsilon > 0$，有:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$$

表明

事件 A 发生的频率 $\dfrac{n_A}{n}$ **依概率收敛**于事件 A 发生的概率。是**频率**作为**概率的估计值**的理论依据。

6.2.5 *随机变量的三种收敛性

1. 依概率收敛（Convergence in Probability）
   依概率收敛是指一个随机变量序列 $\{X_n\}$ **收敛于一个随机变量** X ，如果对于任意的正数 ε ，都有：$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \ge \epsilon) = 0$
   这意味着随着 n 的增大，随机变量 X_n 与 X 之间的差异大于 ε 的概率趋近于0。换句话说，X_n 以越来越高的概率接近 X。
   弱大数定律都依概率收敛

2. 以概率1收敛（Convergence Almost Surely）：
   以概率1收敛，也称为几乎处处收敛，是指一个随机变量序列 $\{X_n\}$ 收敛于一个随机变量

X，如果存在一个事件 A，其概率为1（即 $P(A)=1$），使得对于所有属于 A 的样本点 ω，都有：$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega)$
这意味着除了一个概率为0的事件之外，对于所有的样本点，随机变量序列 X_n 都会收敛于 X。
强大数定律以概率1收敛

3. 依分布收敛（Convergence in Distribution）：
依分布收敛，也称为弱收敛，是指一个随机变量序列 $\{X_n\}$ 的分布函数 F_n 收敛于一个随机变量 X 的分布函数 F，如果对于所有的实数 x 和所有的连续点 x（即 F 在 x 处连续），都有：$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$
这里 $F_n(x)=P(X_n\le x)$ 是 X_n 的分布函数，$F(x)=P(X\le x)$ 是 X 的分布函数。依分布收敛关注的是随机变量序列的分布函数的收敛性，而不是随机变量本身。
中心极限定理是依分布收敛

这三种收敛方式之间的关系是：以概率1收敛蕴含依概率收敛，而依概率收敛蕴含依分布收敛。然而，反之则不一定成立。例如，依分布收敛的随机变量序列可能不依概率收敛，也不一定以概率1收敛。

6.3 中心极限定理（依分布收敛）

6.3.1 独立同分布的中心极限定理

设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ **独立同分布**，且存在有限的数学期望 $EX_i=\mu$ 和方差 $DX_i=\sigma^2\neq 0$

定义部分和随机变量 $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

Y_n^* 为 Y_n 的标准化随机变量，$Y_n^*=\dfrac{Y_n-EY_n}{\sqrt{DY_n}}=\dfrac{Y_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$，则

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n^*}(x)=\lim_{n\to\infty} P\{Y_n^*\le x\}=\Phi(x)=\int_{\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

当 n 充分大时，Y_n^* 近似服从 $N(0,1)$，$Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\mu,n\sigma^2)$

应用

设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ **独立同分布**，且存在有限的数学期望 $EX_i=\mu$ 和方差 $DX_i=\sigma^2\neq 0$

定义部分和随机变量 $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，$Y_n\sim N(n\mu,n\sigma^2)$，

可以用**逼近公式** $P(Y_n\le x)\approx F_{N(n\mu,n\sigma^2)}(x)$
特别二项分布 $B(n,p)$ 可用正态分布 $N(np,np(1-p))$ 逼近

典型情形：设 X_n 是独立同分布

- X_n 服从两点分布，则 Y_n 服从二项分布，近似正态分布
- X_n 服从集合分布，则 Y_n 服从负二项分布，近似正态分布
- X_n 服从泊松分布，则 Y_n 服从近似正态分布
- X_n 服从均匀分布，则 Y_n 服从样条分布，近似正态分布
- X_n 服从指数分布，则 Y_n 服从样条分布，近似正态分布
- X_n 服从正态分布，则 Y_n 或 $\overline{X_n}$ 服从正态分布

6.3.2 De Moivre-Laplace 定理

设 μ_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是在每次试验中事件 A 发生的概率，则对任意区间 $[a, b]$，成立：

$$\lim_{n\to\infty} P\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

数理统计

第7章 总体和分布 笔记03的7

数理统计(1)：总体和分布

- 概念：总体与样本；统计量(样本均值和样本方差)，统计量的分布(分位数)
- 知识点：每个样本都是总体的独立同分布
  $\chi^2(n) = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2; EX = n, DX = 2n$
  $t(n) = Z/(\chi^2(n)/n)$，有对称性；$t_{1-a}(n) = -t_a(n)$;
  $F(m,n) = \frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$. 非负性*,互逆性*；
  特别： 请熟悉P178页常用结论
- 例子：正态总体的统计量分布：样本均值与样本方差独立；
  $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n), (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$;
  $\to (\bar{X}_n - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.
  两个正态总体的均值差的分布,样本方差比的分布***;
- 复习例题：P181例2，P189例6，P193例9,10,11

7.0 例题们

χ^2 分布

例 2 设 X_1，X_2，X_3，X_4 是取自正态总体 $X\sim N(0,\ 2^2)$ 的简单随机样本，且

$$Y=a\,(X_1-2X_2)^2+b\,(3X_3-4X_4)^2.$$

若统计量 Y 服从 χ^2 分布，求出 a，b 的值，并求 Y 的自由度．

解法一

$Y=[\sqrt{a}(X_1-2X_2)]^2+[\sqrt{b}(3X_3-4X_4)]^2$，令 $Y_1=\sqrt{a}(X_1-2X_2)$，$Y_2=\sqrt{b}(3X_3-4X_4)$，则 $Y=Y_1^2+Y_2^2$.

为使 $Y\sim\chi^2(2)$，必有 $Y_1\sim N(0,\ 1)$，$Y_2\sim N(0,\ 1)$，因而

$$EY_1=0,\ DY_1=1,\ EY_2=0,\ DY_2=1.$$

注意到 $DX_1=DX_2=DX_3=DX_4=4$，由

$$\begin{aligned}DY_1&=D[\sqrt{a}(X_1-2X_2)]=aD(X_1-2X_2)=a(DX_1+4DX_2)\\&=a(4+4\times4)=20a=1,\\DY_2&=D[\sqrt{b}(3X_3-4X_4)]=bD(3X_3-4X_4)=b(9DX_3+16DX_4)\\&=b(4\times9+4\times16)=100b=1,\end{aligned}$$

分别得到 $a=1/20$，$b=1/100$. 这时 $Y\sim\chi^2(2)$，自由度为 2.

解法二　因为 $X_i\sim N(0,2^2)$ 且相互独立，所以有

$$\begin{aligned}X_1-2X_2&=X_1+(-2X_2)\\&\sim N(1\times0+(-2)\times0,\ 1^2\times2^2+(-2)^2\times2^2)\sim N(0,\ 20),\\3X_3-4X_4&=3X_3+(-4X_4)\\&\sim N(3\times0+(-4)\times0,\ 3^2\times2^2+(-4)^2\times2^2)\sim N(0,\ 100),\end{aligned}$$

故 $$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1),\quad \frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\sim N(0,1).$$

为使 $Y=\left(\dfrac{X_1-2X_2}{1/\sqrt{a}}\right)^2+\left(\dfrac{3X_3-4X_4}{1/\sqrt{b}}\right)^2\sim\chi^2(2)$，必有

$$\frac{X_1-2X_2}{1/\sqrt{a}}\sim N(0,\ 1),\quad \frac{3X_3-4X_4}{1/\sqrt{b}}\sim N(0,\ 1).$$

与上面两个服从标准正态分布的随机变量比较得

$$1/\sqrt{a}=\sqrt{20},\ 1/\sqrt{b}=\sqrt{100}，即\ a=1/20,\ b=1/100.$$

χ^2 分布的性质如下．

正态分布、$\chi^2(n)$ 分布、$t(n)$分布

例 6　设 $X_1, X_2, \cdots, X_{32}$ 为来自于正态总体 $N(\mu, 4^2)$ 的样本，令

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)}{\sqrt{\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2}},$$

求：Y 的分布．

解　由题设条件得

$$\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)\sim N(0, 16\times 4^2),$$

$$\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)=16\times\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)=16U,$$

其中　$$U=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)\sim N(0, 1),$$

$$\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2=16\sum_{j=17}^{32}\left(\frac{X_j-\mu}{4}\right)^2=16V,$$

其中 $V=\sum_{j=17}^{32}\left(\frac{X_j-\mu}{4}\right)^2\sim\chi^2(16)$，显然 U 与 V 相互独立，由 t 分布的定义知

$$\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)}{\sqrt{\sum_{j=17}^{32}(X_j-\mu)^2}}=\frac{16U}{\sqrt{16V}}=\frac{U}{\sqrt{V/16}}\sim t(16),$$

所以 Y 服从自由度为 16 的 t 分布．

正态分布、$\chi^2(n)$ 分布、$t(n)$分布、F 分布

例 9　设 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$，其中 $X\sim N(0, 1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，求：T^2 的分布．

解　因为 $X\sim N(0, 1)$，所以 $X^2\sim\chi^2(1)$，由题设知 $Y\sim\chi^2(n)$，由 X 与 Y 相互独立，得到 X^2 与 Y 相互独立，故

$$T^2=\frac{X^2/1}{Y/n}\sim F(1, n).$$

正态分布、$\chi^2(n)$ 分布、$t(n)$分布、F 分布

例 10 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，试确定常数 c，使得 $c\dfrac{(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}$ 服从 F 分布．

解 因为 $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$，所以 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，$\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$．

又 $\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$，且 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2$ 相互独立，由于

$$c\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} = c\,\frac{1}{n}\,\frac{\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\Big/1}{\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\Big/(n-1)},$$

所以当 $c=n$ 时，$c\dfrac{(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}$ 服从 $F(1, n-1)$ 分布．

正态分布、$\chi^2(n)$ 分布、$t(n)$分布、F 分布

例 11 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，$1 \leqslant m < n$，试确定常数 c，使得 $Y = c\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^m X_i\right)^2}{\sum\limits_{i=m+1}^n X_i^2}$ 服从 F 分布．

解 因 $X_1, X_2, \cdots, X_m, X_{m+1}, \cdots, X_n$ 相互独立且同服从 $N(0,1)$，$\sum\limits_{i=1}^m X_i$ 服从正态分布 $N(0, m)$，则 $\sum\limits_{i=1}^m X_i \sim N(0, m)$，

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^m X_i \sim N(0,1),\ \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^m X_i\right)^2 \sim \chi^2(1),\ \sum_{i=m+1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-m).$$

由于 $Y = c\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^m X_i\right)^2}{\sum\limits_{i=m+1}^n X_i^2} = c\,\dfrac{m}{(n-m)}\,\dfrac{\dfrac{1}{m}\left(\sum\limits_{i=1}^m X_i\right)^2\Big/1}{\sum\limits_{i=m+1}^n X_i^2\Big/(n-m)}$，所以，当 $c=\dfrac{n-m}{m}$ 时，

$Y = c\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^m X_i\right)^2}{\sum\limits_{i=m+1}^n X_i^2}$ 服从 $F(1, n-m)$分布．

7.1 总体与样本

7.1.1 总体与个体

- 总体：具有一定共同属性的研究对象的全体；
- 个体：组成总体的每一个元素

在实际中我们主要关心的是：研究对象的某一（或某几项）数量的指标 $X = X(\omega)$，它是一个随机变量。

- 总体：随机变量（数量指标） X 的全体取值构成的集合。
- 总体的分布：随机变量 X 的分布。

7.1.2 样本值与样本

- 从一个总体 X 中，随机抽取 n 个个体（有放回的重复抽样）：
  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是一次抽样观察（记录）的结果，称 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为总体 X 的一组样本观察值，简称**样本值**。
  由于抽样的随机性，每次抽样结果是变化的。引入随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，每次抽样结果看成是随机变量的取值。
  称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自于总体 X 的样本容量为 n 的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组观察值，称为**样本值**。

- **总体**就是一个随机变量 X

- **样本**就是 n 个相互独立的 X 同分布的随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$

- 按机会均等的原则，从总体中选取一些个体进行实验或观察的过程，称为**随机抽样**。

- 获得简单随机样本的方法是**简单随机抽样**。

7.1.3 样本分布

若总体 X 具有分布函数 $F(x)$，设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自于总体 X 的样本，则 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且 X_i 的分布函数：

$$F_{X_i}(x_i) = P\{X_i \leq x_i\} = P\{X \leq x_i\} = F(x_i)$$

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布函数称为**样本分布**，即

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(X_i)$$

7.2 样本矩和统计量

7.2.1 样本矩（样本的矩统计量）

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自于总体 X 的一个样本，称

- 样本均值：$\overline{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

- 样本方差：$S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

- k 阶原点矩：$A_k = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$

- k 阶中心距：$B_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$

样本矩都是随机变量。

如果 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组观察值，则：

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$
$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \qquad b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k$$

分别是 $\overline{X}, S^2, A_k, B_k$ 的观察值。

7.2.2 统计量

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体 X 的一个样本， $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 为一个连续函数，则称 $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为样本的一个**统计量**。

显然，$g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是一个随机变量。

如果 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组观察值，则：$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的观察值

7.2.3 顺序统计量与经验分布函数

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自于总体 X 的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ （可以有相等的）是样本观察值，将观察值按大小次序排列，得到：

$$x_1^* \le x_2^* \le \ldots \le x_n^*$$

规定 X_i^* 的取值为 x_i^*，得到 $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ 称为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的一组**顺序统计量**。

$X_1^* = min_{1 \le i \le n} X_i$ ，$X_n^* = max_{1 \le i \le n} X_i$

记函数：

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1^* \\ \frac{1}{n} & , x_1^* \le x \le x_2^* \\ \frac{k}{n} & , x_k^* \le x \le x_{k+1}^* (k = 1, \ldots, n-1) \\ 1 & , x \ge x_n^* \end{cases}$$

$F_n(x)$ 是一单调不减，右连续函数，且满足 $F_n(-\infty)=0$ 和 $F_n(+\infty)=1$，由此可见，$F_n(x)$ 是一个分布函数，称它为**总体 X 的经验分布函数或样本分布函数**。

$F_n(x)$ 可作为 X 的未知分布函数 $F(x)$ 的一个近似，n 越大，近似程度越好。

7.3 常用统计量的分布

7.3.1 正态总体样本的线性函数服从正态分布

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自于 X 的一个样本，则样本的线性函数：

$$Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b \qquad Y\sim N(EY,DY)$$
$$EY=\mu\sum_{i=1}^{n}a_i+b \qquad DY=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

特别地，当 $a_i=\dfrac{1}{n},b=0$ 时，$Y=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

$\overline{X}$ 均值与总体均值相等，方差等于总体方差的 $\dfrac{1}{n}$，n 越大，越向总体均值 μ 集中。

常用结论：

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}) \quad \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1) \quad \frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})\sim N(0,1)$$

$$X_j-\overline{X} \;=\; X_j-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \;=\; (1-\frac{1}{n})X_j-\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}X_i \;\sim\; N(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2)$$

$$D(X_i-\overline{X})=DX_i+D(-\overline{X})+2cov(X_i-\overline{X})=(1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n})\sigma^2$$

7.3.2 $\chi^2(n)$ 分布

定义

设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则随机变量 $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 的概率密度为

$$f(y)\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

称 χ^2 服从**自由度为** n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

χ^2 的（下侧）α 分位点：

对于给定的正数 α $(0<\alpha<1)$，称满足

$$F_{\chi^2}(\chi^2_\alpha(n)) = P\{\chi^2 \le \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{-\infty}^{\chi^2_\alpha(n)} f(y)\,dy = a$$

的点 $\chi^2_\alpha(n)$ 称为 χ^2 分布的（下侧）α 分位点。

对于不同的 α 和 n，$\chi^2_\alpha(n)$ 的值可在 χ^2 分布的分布函数值表中查到，当 $n>45$ 时，附表中没有列出，此时可用 $\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$ 求出 $\chi^2_\alpha(n)$ 的近似值，上式中的 z_α 是标准正态分布的 α 分位点，$\Phi(z_\alpha) = a$

性质

定理2:

若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $EX = n, DX = 2n$。

定理3:

若 $X_1 \sim \chi^2(n_1), \quad X_2 \sim \chi^2(n_2)$，且 X_1 与 X_2 相互独立，则 $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

定理4:

设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 相互独立，且都服从 $N \sim (\mu, \sigma^2)$，则:

1. $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立
2. $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

其中

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, \quad \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

7.3.3 t 分布

定义

设 $X \sim N(0,1)$, $\quad Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，随机变量 $T = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ 的概率密度为

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

称 T 服从自由度为 n 的 t 分布，记作$T \sim t(n)$

t 分布的密度函数为偶函数。

t 分布的（下侧）α 分位点：

对于给定的正数 α $(0<\alpha<1)$，使满足 $P\{T \le t_\alpha(n)\}$ 的点 $t_\alpha(n)$ 为 t 分布的（下侧）α 分位点。

t 分布的（双侧）α 分位点：

数 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 满足 $P\{T \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\} = 1-\frac{\alpha}{2}$,

则 $P\{|T| \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\} = 1-\alpha$, $P\{|T| \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\} = \alpha$

称 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 为 t 分布的（双侧）α 分位点。

对于不同的 α， $t_\alpha(n)$ 的值可在 t 分布表中查到，当 $n>45$ 时，附表中没有列出，此时可查标准正态分布表，得 z_α，且有 $t_\alpha(n) \approx z_\alpha$

定理6:

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且都服从 $N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \sim t(n-1)$$

定理7:

设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 分别是从正态分布总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 中所抽取的独立样本，则

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}}\cdot\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}\sim t(m+n-2)$$

7.3.4 F 分布

设 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，随机变量 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$

称 F 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记作 $F\sim F(n_1,n_2)$

F 的（下侧）α 分位点：

对于给定的正数 α $(0<\alpha<1)$，使满足 $P\{F\le F_\alpha(n)\}$ 的点 $F_\alpha(n)$ 为 F 分布的（下侧）α 分位点。

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

第8章1-3 参数估计 笔记04的8:1-3

数理统计(2): 参数估计

- 概念: 点估计与评估:: 参数统计量$\theta=g(X_1,\ldots,X_n)$; 矩估计，极大似然估计； 无偏性，有效性(方差小)，一致性(相合性);
- 知识点: 样本均值是期望的最小方差无偏线性估计MVU，样本方差是方差的无偏估计。正态总体的样本均值和样本方差的无偏和有效性
- 例子：常见分布的矩估计和极大似然估计(均匀分布); 正态总体的极大似然估计； 给定函数的极大似然估计;
- 复习例题：P199 例2，P202 例4，P204 例7，P211 例3 P212 例5 P214 例7

8.0 例题们

矩估计

例 2 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自于总体 X 的样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值，求：θ 的矩估计．

解 先求总体矩

$$EX=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}\mathrm{d}x=\theta\int_0^1 x^{\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{\theta+1}x^{\theta+1}\Big|_0^1=\frac{\theta}{\theta+1}.$$

令 $EX=A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$，即得$\frac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$，即有 $\theta=(\theta+1)\overline{X}$，解之得 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$为 θ 的矩估计量，$\hat{\theta}=\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$为 θ 的矩估计值．

极大似然估计

例 4 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，即有概率密度

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},\quad \lambda>0,$$

又 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自于总体 X 的样本值，试求：λ 的极大似然估计．

解 似然函数为

$$L=L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\lambda)=\lambda^n\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda x_i}=\lambda^n\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

于是 $\ln L=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i$，方程$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ 的根为 $\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}$．

经验证，$\ln L(\lambda)$在 $\lambda=\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{x}}$处达到最大值，所以 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{x}}$是 λ 的极大似然估计．

极大似然估计

例 7 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant x\leqslant\theta\\ 0, & 其他\end{cases},\ \theta>0,$$

又 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自于总体 X 的样本值，求：参数 θ 的极大似然估计．

解 令 $x_n^*=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$，似然函数

$$\begin{aligned}L(\theta)&=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\\&=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & x_n^*\leqslant\theta\\ 0, & \theta<x_n^*\end{cases},\end{aligned}$$

当 $\theta\geqslant x_n^*$ 时，$L(\theta)$ 是 θ 的单调减函数，$L(\theta)\leqslant L(x_n^*)$；当 $\theta<x_n^*$ 时，$L(\theta)=0$. 于是 $L(\theta)$ 在 $\hat{\theta}=x_n^*$ 处达到最大值，所以 θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}=\max\{x_1,\cdots,x_n\}.$$

证明无偏估计

例 3 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本，试确定常数 C，使得 $C\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计．

解 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，所以

$$EX_i=\mu,\ DX_i=\sigma^2,\ i=1,2,\cdots,n,$$
$$E(X_{i+1}-X_i)=0,\ D(X_{i+1}-X_i)=2\sigma^2,$$

因而

$$E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2=2\sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\sigma^2&=CE\left[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2\\&=C\sum_{i=1}^{n-1}2\sigma^2=C(n-1)2\sigma^2,\end{aligned}$$

故 $C=1/[2(n-1)]$．

最小方差无偏估计

例 5 设 X_1，X_2，X_3 为总体的一个样本，试证：下列估计量

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3,$$

$$\hat{\theta}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3,$$

$$\hat{\theta}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{3}{4}X_2-\frac{1}{12}X_3$$

都是总体均值 μ 的无偏估计量，并判断哪个估计量最佳?

证明 已知 X_1，X_2，X_3 独立同分布，则 $EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$，$i=1,2,3$，

$$\begin{aligned}E\hat{\theta}_1&=E\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)\\&=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3\\&=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu,\end{aligned}$$

$$E\hat{\theta}_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)\mu=\mu,$$

$$E\hat{\theta}_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)\mu=\mu,$$

所以 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，$\hat{\theta}_3$ 都是 μ 的无偏估计量.

$$\begin{aligned}D\hat{\theta}_1&=D\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)\\&=\left(\frac{1}{5}\right)^2DX_1+\left(\frac{3}{10}\right)^2DX_2+\left(\frac{1}{2}\right)^2DX_3\\&=\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\sigma^2=\frac{38}{100}\sigma^2,\end{aligned}$$

$$D\hat{\theta}_2=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]\sigma^2=\frac{50}{144}\sigma^2$$

$$D\hat{\theta}_3=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{12}\right)^2\right]\sigma^2=\frac{98}{144}\sigma^2,$$

于是 $D\hat{\theta}_2<D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_3$，故 $\hat{\theta}_2$ 最佳.

一致性

例 7 证明：正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的一致性估计量.

证明 由切比雪夫不等式，可知

$$P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=P\{|S^2-ES^2|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{DS^2}{\varepsilon^2},$$

而

$$\begin{aligned}DS^2&=D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n-1}\right]=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]\\&=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{n-1},\end{aligned}$$

所以 $1\geqslant P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2(n-1)}$，由此即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|S^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=1$. 证毕.

8.1 参数的点估计

8.1.1 矩估计法

用**样本矩**估计相应的总体（随机变量）矩。
只要总体的 k 阶矩存在，样本 k 阶矩依概率收敛于相应的总体 k 阶矩。

具体过程

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$，未知参数为 $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$.

1. 求出总体矩：$\mu_k=EX^k=\mu_k(\theta_1,\theta_2,...,\theta_m),k=1,2,...,m$ 或 $\beta_k=E(X-EX)^k=\beta_k(\theta_1,\theta_2,...,\theta_m),k=1,2,...m$
2. 对总体进行随机抽样，设 $X_1,X_2,...,X_n$ 为来自于总体 X 的样本，$x_1,x_2,...,x_n$ 为样本值；
3. 构造样本矩：
$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\ B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^k,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^2;$$
4. 由于：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}EX^k=\mu_k(n\to+\infty)$,
$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^k\xrightarrow{P}E(X-EX)^k=\beta_k(n\to+\infty);$$
5. 联立并解方程组求出 $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$.

8.1.2 极大似然估计法

根据样本的具体情况，选择**总体参数的估计**，使得**该样本发生的概率最大**。

1 连续情形

定义

若 X 是连续型随机变量，概率密度函为 $f(x;\theta)$，其中 θ 为未知参数，

$(X_1,X_2,...,X_n)$ 落在点 $(x_1,x_2,...x_n)$ 邻域内的概率为 $\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\prod_{i=1}^{n}\Delta x_i$

选取总体参数 θ 的估计值 $\hat{\theta}$，使得此概率达到最大，即 $\prod_{i=1}^{n}f\{x_i;\theta\}$ 达到最大值。

$L(\theta)=L(x_1,x_2,..x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f\{x_i;\theta\}$ 称为**极大似然函数**。

单参数解法

1. 求 $L(\theta)=L(x_1,x_2,..x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$
2. 解方程 $\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0$ 或 $\frac{d}{d\theta}lnL(\theta)=0$

3. 经验证 $lnL(\theta)$ 在 $\theta =...$ 处达到最大值，所以...是 λ 的极大似然估计

多参数解法

1. 求 $L(\theta)=L(x_1,x_2,..x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$
2. 解方程 $\frac{\partial lnL(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)}{\partial\theta_i}=0$
3. 经验证 $lnL(\theta)$ 在 $\theta =...$ 处达到最大值，所以...是 λ 的极大似然估计

2 离散情形

定义

若 X 是离散型随机变量，分布律 $P\{X=x\}=p(x;\theta)$ 形式已知，参数 θ 未知，
$x_1,x_2,...,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的样本观察值。
$X_1,X_2,...,X_n$ 取到 $x_1,x_2,...,x_n$ 的概率：

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

选取总体参数 θ 的估计值 $\hat{\theta}$，使得此概率达到最大，即 $\prod_{i=1}^{n}p\{x_i;\theta\}$ 达到最大值。

$L(\theta)=L(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p\{x_i;\theta\}$ 称为**极大似然函数**。

解法

同上

8.2 点估计的优良性

8.2.1 无偏性

设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$ （简记为 $\hat{\theta}$）为未知参数 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta})=\theta$ （真值），则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计。

证明 $E(\hat{\theta})=\theta$

8.2.2 最小方差无偏估计（有效性）

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计，若对于 θ 的任一无偏估计 $\hat{\theta}'$，成立：

$$D(\hat{\theta})\leq D(\hat{\theta}')$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最小方差无偏估计。

若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是无偏估计量，且 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则称估计量 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效，或较佳，或较优。

找 $D(\hat{\theta}) \leq D(\hat{\theta}')$

8.2.3 一致估计（相合性）

设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，若 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 0，即对任意的 $\varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta| < \varepsilon\} = 1$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致性估计。

8.2.4 知识点

样本均值是期望的最小方差无偏线性估计MVU（样本均值作为总体期望的估计，具有无偏性和有效性）

例 4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自于总体 X 的样本，总体均值 $EX=\mu$，总体方差 $DX=\sigma^2$，求：μ 的最小方差线性无偏估计．

解 已知 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且与 X 同分布，则

$$EX_i=\mu,\ DX_i=\sigma^2,\ i=1,2,\cdots,n.$$

μ 的线性估计是将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的线性函数 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$ 作为 μ 的估计量．问题是如何选取 $a_1, \cdots, a_n$ 的值，使得无偏性和最小方差这两个要求都能得到满足．易知

$$E(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=\mu\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right),$$

$$D(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

无偏性要求 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=1$，最小方差要求 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 达到最小．利用柯西（Cauchy）不等式得

$$1=\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot 1)\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}},$$

且等号成立，当且仅当 a_i 全相等，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$，由 $1=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=\sum\limits_{i=1}^{n} a=na$ 得到 $a=\frac{1}{n}$，于是，当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 达到最小．故 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是 μ 的最小方差线性无偏估计．

样本方差是方差的无偏估计

例 1 设总体 X 的均值 $EX=\mu$，总体方差 $DX=\sigma^2$. 设 X_1，X_2，…，X_n 为来自于总体 X 的样本，求证：

(1) $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的无偏估计量；

(2) $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计量；

(3) 设常数 a_1，a_2，…，a_n 满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，则 $\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 是总体均值 μ 的无偏估计.

证明 (1) 因为 X_1，X_2，…，X_n 独立且与 X 同分布，所以

$$EX_i=\mu,\ DX_i=\sigma^2,\ i=1,2,\cdots,n.$$

于是
$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=EX=\mu,$$

故 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的无偏估计量；

(2) $D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

下面计算 ES^2.

$$EX_i^2=DX_i+(EX_i)^2=\sigma^2+\mu^2,$$

$$E\overline{X}^2=D\,\overline{X}+(E\,\overline{X})^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2,$$

$$\begin{aligned}ES^2&=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]\\&=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\,\overline{X}X_i+\overline{X}^2)\right]\\&=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\right)\right]\\&=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\cdot n\overline{X}+n\,\overline{X}^2\right)\right]\end{aligned}$$

$$= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 - nE\,\overline{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot(n-1)\sigma^2 = \sigma^2,$$

故得证.

说明：$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不是总体方差 σ^2 的无偏估计. 事实上，

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2,$$

$$ES_n^2 = E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right) = \frac{n-1}{n}ES^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2.$$

所以，它是有偏的.

(3) $E\hat{\mu} = E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n}a_iEX_i$

$$= \sum_{i=1}^{n}a_i\mu = \mu\sum_{i=1}^{n}a_i = \mu.$$

故得证.

正态总体的样本均值和样本方差的无偏和有效性

8.3 区间估计与置信区间

8.3.1 置信区间

设总体分布含有一未知参数 θ，又 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自于总体的样本，若对给定的 α $(0<\alpha<1)$，统计量 $\theta_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 和 $\theta_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 满足:

$$P\{\theta_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \theta \le \theta_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)\} = 1-\alpha$$

则称区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 为 θ 相应于置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间，简称**置信区间。**

θ_1, θ_2 分别称为**置信下限**和**置信上限**。

注

1. 统计量 $\theta_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 和 $\theta_2(X_1, X_2, \ldots X_n)$ 是随机变量，区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 是置信区间。

对于 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 是普通区间。

2. α 较小时，随机区间以较大的概率包含 θ

3. 置信区间的长度意味着误差，因此**越小越好**

8.3.2 单侧置信限

若对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，统计量 $\theta_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 满足 $P\{\theta\geq\theta_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)\}=1-\alpha$，则称区间 $[\theta_1,+\infty)$ 为 θ 相应于置信度是 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，称 θ_1 为置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信下限。**

若对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，统计量 $\theta_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 满足 $P\{\theta\leq\theta_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)\}=1-\alpha$，则称区间 $(-\infty,\theta_2]$ 为 θ 相应于置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，称 θ_2 为置信度为 $1-\alpha$ 的**单侧置信上限。**

第8章4第9章1-2 统计推断 笔记04的8:4 9:1-2

数理统计(3): 统计推断(区间估计与假设检验)

- 概念：置信区间与置信水平$1-\alpha$,零假设,备择假设,显著性水平α;
  置信区间的意义；假设检验的两类错误；
- 知识点:一个正态总体的统计推断分布：
  样本均值：已知方差，正态分布,正态检验；样本均值：未知方差，$t(n-1)$分布,t检验
  样本方差：$\chi^2(n-1)$分布，卡方检验；统计量分布见上面5
- 例子：以上三类的区间估计。三类假设检验：$\alpha=0.05, z_{0.975}=1.96$
- 复习例题：P219 例2 P230 例1

8.4 正态分布均值和方差的区间估计

8.4.1 均值 $EX=\mu$ 的区间估计

1.方差 $DX=\sigma_0^2$ 已知，对 $EX=\mu$ 进行区间估计

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma_0^2)$，其中 σ_0^2 已知，又 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自于总体的样本。

求出统计量 $\mu_1(X_1,X_2,\ldots,X_n),\mu_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 使:

$$P\{\mu_1(X_1,X_2,\ldots,X-n)\leq\mu\leq\mu_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)\}=1-\alpha$$

区间 $[\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}]$ **为** μ **的置信度为** $1-\alpha$ **的置信区间**

- 特别的，对于不服从正态分布的总体，只要n足够大，则由中心极限定理，随机变量 $Y=\frac{\overline{X}-EX}{\sqrt{\frac{DX}{n}}}$ 近似地服从标准正态分布，因此仍然有 $[\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{n}}]$ **作为** EX **的置信区间**

例

例 1 已知某种滚珠的直径服从正态分布，且方差为 0.06，现从某日生产的一批滚珠中随机地抽取 6 只，测得直径的数据（单位：mm）为 14.6，15.1，14.9，14.8，15.2，15.1. 试求：该批滚珠平均直径的 95%置信区间 .

解 ① 当 $\alpha=0.05$ 时，$1-\alpha=0.95$，查表得 $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{0.975}=1.96$，

$$\overline{x}=\frac{1}{6}(14.6+15.1+14.9+14.8+15.2+15.1)=14.95,$$

② $$\sigma^2=0.06,\ \sigma=\sqrt{0.06},\ n=6.$$

于是，

③ $$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95-1.96\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}=14.75,$$

$$\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95+1.96\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}=15.15,$$

故所求置信区间为[14.75，15.15].

2.方差 DX 未知，对 $EX=\mu$ 进行区间估计

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，由于 σ^2 未知，用样本方差 S^2 来代替总体方差 σ^2

故均值 μ 的置信区间为 $\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

其中 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

例1

例 2 设有某种产品，其长度服从正态分布，现从该种产品中随机抽取 9 件产品，得样本均值 $\overline{x}=9.28$cm，样本标准差 $s=0.36$cm，试求：该产品平均长度的 90%的置信区间 .

解 当 $\alpha=0.10$，$n=9$ 时，查 t 分布表得 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.95}(8)=1.86$，于是

$$\overline{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=9.28-1.86\times\frac{0.36}{3}=9.06,$$

$$\overline{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=9.28+1.86\times\frac{0.36}{3}=9.50,$$

故所求置信区间为 [9.06，9.50].

例2

例 3 设灯泡的寿命服从正态分布，现从一批灯泡中随机地抽取 6 只，测得寿命的数据（单位：h）为 1020，1010，1050，1040，1050 和 1030. 求：灯泡寿命平均值的置信度为 0.95 的单侧置信下限.

解 由于总体方差未知，故统计量

$$T=\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

于是对给定的 α，查 t 分布表可得临界值 $t_{1-\alpha}(n-1)$，使得

$$P\{T\leqslant t_{1-\alpha}(n-1)\}=1-\alpha,$$

$$P\left\{\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\leqslant t_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

即

$$P\left\{\mu\geqslant\overline{x}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha.$$

由此得到 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\overline{x}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},+\infty\right).$$

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\theta_1=\overline{x}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

本例中，$1-\alpha=0.95$，$n=6$，$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(5)$ $=2.1050$，$\overline{x}=1033.3$，$s=18.69$，将相关数值代入得单侧置信下限为

$$\theta_1=1033.3-\frac{18.69}{\sqrt{6}}\times 2.0150=1017.9.$$

例3

例 4 收获前如何预测水稻总产量问题：某县多年来一直种植某种水稻品种并沿用传统的耕种方法，平均亩产 600kg，今年换了新的稻种，耕种方法也做了一些改进，收获前，为了预测产量高低，先抽查了具有一定代表性的 30 亩水稻的产量，平均亩产 642.5kg，标准差为 160kg，如何估算总产量．

解 由于总产量是随机变量，因此最有参考价值的方法是估算出总产量在某一个范围内，因而这是一个区间估计问题．设水稻亩产量 x 为一随机变量，由于它受众多随机因素的影响，我们可设它服从正态分布，即 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$．只要算出水稻平均亩产量的置信区间，则下限与种植面积的乘积就是对总产量最保守的估计，而上限与种植面积的乘积则是对总产量最乐观的估计．根据正态分布关于均值的区间估计，在方差未知时，μ 的置信度为 95%的置信区间为

$$\left[\bar{x}-1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}\right],$$

其中 s_n 为样本标准差．

由已知，$n=30$，$\bar{x}=642.5$，$s_n=160$，将这些数据代入上式，有

$$\bar{x} \pm 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}=642.5 \pm 1.96 \frac{160}{\sqrt{30}}=642.5 \pm 1.96 \times 29.2=642.5 \pm 57.25.$$

因此得到 μ 的 95%的置信区间为 [585.25，699.75]．

亩产量 x 的置信下限约为 585.25kg，小于亩产量总体均值 600kg，亩产量 x 的置信上限约为 700kg，则大于以往亩产量总体均值 600kg，由此得出的结论是今年的产量未必比往年高．最保守的估计为亩产 585.25kg，比往年略低；最乐观的估计为亩产可达到 700kg，比往年高出 100kg. 上限和下限差距太大，以至于不能做出准确的预测．要解决这个问题，可再抽查 70 亩，前后共抽样 100 亩．设平均亩产量与标准差不变，即 $\bar{x}=642.5$，$s_n=160$，$n=100$，则 μ 的置信度为 95%的置信区间为 $\bar{x} \pm 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}=642.5 \pm 1.96 \frac{160}{\sqrt{100}}=642.5 \pm 31.4$，即 [611.1，673.9]．置信下限比往年亩产 600kg 多 11.1kg，这样就可以预测在很大程度上今年水稻平均亩产至少比往年要高出 11kg.

8.4.2 方差 DX 的区间估计（总体均值未知）

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体的样本，当总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的参数 μ 未知时，

方差 σ^2 的置信区间为 $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

σ 的置信区间是 $\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right]$

注

选取的临界值 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 不是唯一的。

例

例 5　某自动车床生产的零件，其长度 X 服从正态分布，现抽取 16 个零件，测得长度（单位：mm）分别为 12.15，12.12，12.01，12.08，12.09，12.16，12.03，12.01，12.06，12.13，12.07，12.11，12.08，12.01，12.03，12.06，试求：DX 的置信度为 95% 的置信区间．

解　经计算可得 $\bar{x}=12.075$，$s^2=0.00244$.

查 χ^2 分布表得 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(15)=6.26$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(15)=27.45$，$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\frac{15\times0.00244}{6.26}=0.0058$，$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\frac{15\times0.00244}{27.45}=0.0013$，故 DX 的置信度是 95% 的置信区间为 $[0.0013，0.0058]$.

9.2 正态总体均值和方差的假设检验

假设检验过程中的两类判断错误（判断失误）

1. 当判断 H_0 伪（拒绝 H_0）时，实际情况 H_0 真——此为**第一类错误（弃真）**（概率小于或等于 α）
2. 当判断 H_0 真（接受 H_0）时，实际情况 H_0 伪——此为**第二类错误（纳伪）**（概率为 β ）

当样本容量 n 固定时，犯两类错误的概率大小时相互制约的，即减小其中一个，另一个往往会增大。

通常的实际做法是：设置检验水平 α 来限制第一类错误（根据具体情况），再尽量减小第二类错误。（增大样本容量 n）

在实际问题中，如何给定检验水平 α，应根据具体情况而定

1. 当**拒绝**一个属真的假设，即**犯第一类错误**后果非常严重时，应将 α 取得小一些，如 $\alpha=0.01,\alpha=0.005$ 等；
2. 当**取伪**会引起严重后果时，可将 α 取得适当大一些，如 $\alpha=0.05,\alpha=0.10$ 等。

9.2.1 σ^2 已知

1. σ^2 已知，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu\neq\mu_0$

由样本提供的信息计算 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ 的值，查 $N(0,1)$ 表得 $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

- 若 $|u|>z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 则拒绝原假设 H_0（H_0 伪），接受 H_1；
- 若 $|u|<z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 则接受原假设 H_0（H_0 伪）。

例

例 1 根据大量调查得知，我国健康成年男子的脉搏平均为 72 次/min，标准差为 6.4 次/min，现从某体院男生中随机抽出 25 人，测得平均脉搏为 68.6 次/min. 根据经验，脉搏 X 服从正态分布．如果标准差不变，试问：该体院男生的脉搏与一般健康成年男子的脉搏有无差异？并求出体院男生脉搏的置信区间($\alpha=0.05$).

解 已知 $\sigma=6.4$.

1）检验假设 H_0：$\mu=72$，统计量 $U=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；

2）$n=25$，$\overline{x}=68.6$，$|u_0|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{68.6-72}{6.4/5}\right|=2.656$；

3）对于 $\alpha=0.05$，查标准正态分布表得 $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{0.975}=1.96$；

4）因为 $|u_0|=2.656>1.96=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$，故拒绝 H_0，说明该体院男生的脉搏与一般健康成年男子的脉搏存在差异．

由于

$$\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}=68.6-\frac{6.4}{\sqrt{25}}\times1.96\approx66.1,$$

$$\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}=68.6+\frac{6.4}{\sqrt{25}}\times1.96\approx71.1,$$

所以，该体院男生脉搏的 95%的置信区间为（66.1，71.1).

2. σ^2 已知，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu>\mu_0$

由样本提供的信息计算出 $u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

- 若 $u>z_{1-\alpha}$ 则拒绝原假设（H_0 伪），接受 H_1；
- 若 $u\le z_{1-\alpha}$ 则接受原假设（H_0 真）

例

例 3 某厂生产的一种铜丝，它的主要质量指标是折断力大小．根据以往资料分析，可以认为折断力 X 服从正态分布，且数学期望 $EX=\mu=570\text{N}$，标准差是 $\sigma=8\text{N}$. 今换了原材料重新生产一批铜丝，并从中抽出 10 个样本，测得折断力（单位：N）为 578，572，568，570，572，570，570，572，596，584，从性能上看，估计折断力的方差不会发生变化，问：这批铜丝的折断力是否比以往生产的铜丝的折断力大？（取 $\alpha=0.05$）

解 1）假设 H_0：$\mu=570$，H_1：$\mu>570$；

2）计算统计量 $\dfrac{\overline{x}-570}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的值，算出 $\overline{x}=575.2$，$\dfrac{\overline{x}-570}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{575.2-570}{8/\sqrt{10}}=2.055$；

3）当 $\alpha=0.05$ 时，查标准正态分布表得临界值 $z_{1-\alpha}=z_{0.95}=1.645$；

4）比较 $\dfrac{\overline{x}-570}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $z_{1-\alpha}$ 的值的大小，现在 $\dfrac{\overline{x}-570}{\sigma/\sqrt{n}}=2.055>1.645=z_{1-\alpha}$，故拒绝原假设 H_0，接受 H_1. 也就是说新生产的铜丝的折断力比以往生产的铜丝的折断力要大．

3. σ^2 已知，检验假设 $H_0: \mu=\mu_0; H_1: \mu<\mu_0$

由样本提供的信息计算出 $u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

- 若 $u<-z_{1-\alpha}$ 则拒绝原假设（H_0 伪），接受 H_1；
- 若 $u\geq -z_{1-\alpha}$ 则接受原假设（H_0 真）

例

例 2 已知某零件的质量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，由经验知 $\mu=10(g)$，$\sigma^2=0.05$. 技术革新后，抽取 8 个样品，测得质量（单位：g）分别为 9.8，9.5，10.1，9.6，10.2，10.1，9.8，10.0，若方差不变，问：平均质量是否比 10 小？（取 $\alpha=0.05$）

解 检验假设 $H_0: \mu=10$，$H_1: \mu<10$，选取统计量 $U=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

在 H_0 为真的条件下，

$$U=\frac{\overline{x}-10}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

查标准正态分布表得

$$z_{1-\alpha}=z_{0.95}=1.645,$$

由样本值计算出 $\overline{x}=9.9$.

计算 $U=\dfrac{\overline{x}-10}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的试验值并比较，得出

$$u_0=\frac{\overline{x}-10}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{9.9-10}{\sqrt{0.05}/\sqrt{8}}=-1.26>-1.645=-z_{1-\alpha},$$

故接受原假设 H_0：$\mu=10$.

9.2.2 σ^2 未知

1. σ^2 未知，检验假设 $H_0: \mu=\mu_0; H_1: \mu \neq \mu_0$

由样本计算出 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，然后与 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 进行比较

- 若 $|T|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，则拒绝假设 H_0，接受 H_1
- 若 $|T|<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，则接受假设 H_0

例1

例 4 在某砖厂生产的一批砖中，随机地抽取 6 块进行抗断强度试验，测得结果（单位：kg/cm²）分别为 32.56，29.66，31.64，30.00，31.87，31.03. 设砖的抗断强度服从正态分布，问：这批砖的平均抗断强度是否为 32.50kg/cm²？（取 $\alpha=0.05$）

解 1）假设 $H_0: \mu=32.50$；

2）计算统计量 T 的值，算出 $\overline{x}=31.13$，$s=1.13$，

$$T=\frac{\overline{x}-32.50}{s/\sqrt{n}}=\frac{31.13-32.50}{1.13/\sqrt{6}}=-2.97;$$

3）当 $\alpha=0.05$ 时，查 t 分布表得 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(5)=2.57$；

4）比较 $|T|$ 与 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 的大小．现在 $|T|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，故拒绝原假设 H_0.

例2

例 5 抽取某班级 28 名学生的语文考试成绩，得样本均值为 80，样本标准差[所谓样本标准差是 $S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，而样本方差 $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$]为 8 分，若全年级语文成绩平均是 85 分，试问：该班学生语文的平均成绩与全年级的平均成绩有无差异？并求出该班学生语文平均成绩的置信区间.（假定该年级语文考试成绩服从正态分布，$\alpha=0.05$）

解 本例第一个问题为未知方差，检验 $H_0: \mu=85$，故用 t 检验法，且为双边检验．$\mu_0=85$，$n=28$，$\overline{x}=80$，$S^2=64$，

$$s^2=\frac{n}{n-1}S^2\approx 66.37, s\approx 8.147,$$

$$t_0=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\approx\frac{\sqrt{28}(80-85)}{8.147}\approx -3.248.$$

对于 $\alpha=0.05$，查 $t(27)$ 分布表，得 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(27)=2.052$，因为 $|t_0|=3.248>2.052$，拒绝原假设 H_0，这表明该班学生的语文平均成绩与全年级平均成绩存在差异．

由于 $\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\approx 76.84$，$\overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\approx 83.16$，

故该班学生的语文平均成绩的 95% 置信区间是 (76.84，83.16).

2. σ^2 未知，检验假设 $H_0: \mu=\mu_0; H_1: \mu>\mu_0$

由样本计算出 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，然后与 $t_{1-\alpha}(n-1)$ 进行比较

- 若 $T>t_{1-\alpha}(n-1)$，则拒绝假设 H_0，接受 H_1
- 若 $T\leq t_{1-\alpha}(n-1)$，则接受假设 H_0

3. σ^2 未知，检验假设 $H_0: \mu=\mu_0; H_1: \mu<\mu_0$

由样本计算出 $T=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，然后与 $-t_{1-\alpha}(n-1)$ 进行比较

- 若 $T<-t_{1-\alpha}(n-1)$，则拒绝假设 H_0，接受 H_1
- 若 $T\geq -t_{1-\alpha}(n-1)$，则接受假设 H_0

以上三种检验法均采用了 t 分布，故又名 t 检验法。

9.2.3 正态总体方差的假设检验

1. 检验假设 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2; H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$

根据样本值计算

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

- 若 $\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 则拒绝假设 H_0，接受 H_1
- 否则接受假设 H_0

例1

例 6 某厂生产螺钉，生产一直比较稳定，长期以来，螺钉的直径服从方差为 $\sigma^2=0.0002\text{cm}^2$ 的正态分布．今从产品中随机抽取 10 只进行测量，得螺钉直径的数据（单位：cm）分别为 1.19，1.21，1.21，1.18，1.17，1.20，1.20，1.17，1.19，1.18，问：是否可以认为该厂生产的螺钉的直径的方差为 0.0002cm^2？（$\alpha=0.05$）

解 1）检验假设 $H_0:\sigma^2=0.0002$；

2）统计量

$$W=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(9);$$

3）由样本值得 $\overline{x}=1.19$，$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=0.00022$，故

$$w=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=10;$$

4）查 χ^2 分布表，得 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(9)=\chi^2_{0.975}(9)=19.0$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(9)=\chi^2_{0.25}(9)=2.7$，现在 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(9)=2.7<10<19.0=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(9)$，因此接受原假设 $H_0:\sigma^2=0.0002$.

例2

例 7 设维尼纶的纤度在正常生产条件下服从正态分布 $N(1.405,0.048^2)$，某日抽取 5 根纤维，测得其纤度分别为 1.32，1.36，1.55，1.44，1.40，问：这一天生产的维尼纶的纤度的方差是否正常？（$\alpha=0.10$）

解 本题归结为检验假设 $H_0:\sigma^2=0.048^2$.

因 $n=5$，$\overline{x}=1.414$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=0.03112$，故

$$w=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=\frac{0.03112}{0.002304}=13.5,$$

由 $\alpha=0.10$，查分布表得 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)=0.711$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)=9.488$，因 $w=13.5>9.488$，所以拒绝原假设 H_0，即认为这一天生产的维尼纶的纤度方差不正常．

2. 检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2;H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$

根据样本值计算

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- 若 $\chi^2 < \chi_\alpha^2(n-1)$ 则拒绝假设 H_0，接受 H_1
- 否则接受假设 H_0

3. 检验假设 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2; H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

根据样本值计算

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- 若 $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ 则拒绝假设 H_0，接受 H_1
- 否则接受假设 H_0

例

例 8 在进行工艺改革时，一般若方差显著增大，可进行相反方向的改革以减小方差，若方差变化不显著，可试行别的改革方案．今进行某项工艺改革，加工 23 个活塞，测量其直径，计算得出 $s^2=0.00066$. 设已知改革前活塞直径方差为 0.0004，问：进一步改革的方向应如何？（假定改革前后的活塞直径服从正态分布，$\alpha=0.05$）

解 要解决这个问题，先看改革后的直径方差是否不大于改革前的直径方差，即检验 $H_0:\sigma^2\leqslant 0.0004$. 对 $\alpha=0.05$，自由度为 22，查分布表得 $\chi_{1-\alpha}^2=33.92$，再由样本值计算得 $\chi_0^2=36.3$. 因为 $36.3>33.92$，所以拒绝 $\sigma^2\leqslant 0.0004$ 的假设，即认为改革后的活塞直径方差大于改革前，因此下一步改革应朝相反方向进行．

注：假设检验与置信区间的关系

假设 $H_0 : \mu = \mu_0$ 的检验实质上是找出 μ 的置信区间，如果 μ_0 落在置信区间内，则接受原假设 H_0；如果落在置信区间外，就拒绝假设 H_0

随机过程

第10章 随机过程的基本概念 笔记04的10

随机过程(1): 基本概念和数字特征

- 概念: 随机过程的两个定义; 样本函数, 状态空间, 有限维分布, 五个数字特征函数
- 知识点: 计算简单随机过程的一维或二维分布; 自相关函数和自协方差函数;
- 例子: 贝努利过程; 随机相位正弦波; 白噪声

10.1 随机过程的定义及分类

10.1.1 随机过程的定义

定义1

给定参数集 $T \subset (-\infty, +\infty)$，对于固定 $t \in T$，对应有随机变量 $X(t)$，对应所有 $t \in T$，是**一族随机变量** $\{X(t) = X(e,t), t \in T\}$，则称随机变量族 $\{X(t) = X(e,t), t \in T\}$ 为**随机过程**。

对任意给定的 $t_1 \in T, X(t_1) = X(e,t_1)$ 是一个**随机变量**，称为随机过程在 $t = t_1$ 时的状态变量，简称**状态**。

定义2

设随机试验 E 的样本空间 $E = \{e\}$，$T \subset (-\infty, +\infty)$ 是非空集合，若对于固定 $e_0 \in S$，对应关于参数 t 的函数 $X(e_0, t) = x(t)$ $t \in T \subset (-\infty, +\infty)$ 称为**随机过程**的**样本函数**（或随机过程的一个实现，也称为一条轨道）。

对于所有的 $e \in S$，得到一族 t 的函数 $\{X(e,t), t \in T, e \in S\}$，称为**随机过程**，简称**过程**。简记为 $\{X(t), t \in T\}$ 或 $X(t)$.

T 称为**参数集**。

由定义2得

- 对于 S 中的每一个 e_0 ，$X(e_0, t) = x(t)$ 是仅依赖于 t 的函数，称为随机过程的样本函数，它是随机过程的一次物理实验或对应于 e_0 的轨道
- 对任意给定的 $t_1 \in T$ ，$X(t_1) = X(e, t_1)$ 是一个随机变量，称其为随机过程在 $t = t_1$ 时的状态变量，简称状态

定义3

定义在 $S \times T = \{(e,t)|e \in S, t \in T\}$ 上的**二元函数** $X(e,t)$，对于每个固定的 t，$X(\cdot,t)$ 是可测函数，则称 $\{X(e,t)|e \in S, t \in T\}$ 为随机过程。

对于固定的 t，$X(e,t)$ 是**随机变量**，其所有可能的取值构成的实数空间，称为随机过程的状态空间。它是二元函数 $X(e,t)$ 的值域，记为 S。

例

例题 在一条自动生产线上检验产品质量，每次检验一个，区分正品或次品．那么，整个检验的样本空间为 $S=\{e\}$，$e=(e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots)$，其中 $e_i=$ 正品或次品，$i=1, 2, \cdots$.

为了描述检验的全过程，引入二元函数：$X(e, t)=0$，第 t 次查出正品；$X(e, t)=t$，第 t 次查出次品，$t \in T=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$，则二元函数 $X(e, t)$ 就是一个随机过程．

描述布朗运动的变量 $X(e, t)$ 亦是一个随机过程．

10.1.2 随机过程的分类

1. 按随机过程的参数集和状态空间分类

- 参数集 T 可能为离散集或连续集
- 状态空间 S 可能为离散集或连续集

1. T 离散，S 离散（贝努里随机过程）
2. T 离散，S 连续

参数离散随机过程是随机变量序列，简称**随机序列。**

一般地记 $X_n = X(t_n)$，于是 $\{X(t), t = t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\} = \{X_n\}$

3. T 连续，S 离散（泊松过程）
4. T 连续，S 连续

2. 按随机过程的概率结构分类

- 二阶矩过程，包括正态过程，平稳过程等
- 马尔可夫过程
  - 马尔科夫链
  - 泊松过程
  - 维纳过程
  - 扩散过程
- 更新过程
- 鞅

10.2 随机过程的概率分布

10.2.1 随机过程的n维分布函数

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，对于参数集 T 中的任意 n 个元素：$t_1, t_2, \dots, t_n$ 相应有过程分别在 $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ 的 n 个状态：

$$X(t_1) = X(e, t_1), X(t_2) = X(e, t_2), \dots, X(t_n) = X(e, t_n)$$

n 个状态（随机变量）的**联合分布函数**

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_n) \le x_n\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的 n **维分布函数。**

如果存在非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$，使得：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots,$$

成立，则称 f 为随机过程 $X(t)$ 的 n **维概率密度**，$n = 1, 2, \dots$

10.2.2 独立过程

如果对于任何正整数 n，随机过程的任意 n 个状态都是相互独立的，则称此过程为**独立过程。**
独立过程的 n 维分布函数（或 n 维概率密度）必等于相应的 n 个一维分布函数（一维概率密度）的乘积，即有：

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i, t_i) \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

例

例 1 在上节例题中，设各次检验相互独立地进行，每次检验的次品率为 p，$0<p<1$，求：随机过程$X(t)$在 $t_1=1$ 和 $t_2=2$ 时的二维分布函数．

解 在 $t_1=1$ 和 $t_2=2$ 时，过程的状态 $X(1)$ 和 $X(2)$ 的分布律分别为

$X(1)$	0	1
P	$1-p$	p

$X(2)$	0	2
P	$1-p$	p

一维分布函数分别为

$$F(x;1)=P\{X(1)\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-p, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases},$$

$$F(x;2)=P\{X(2)\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-p, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

由 $X(1)$ 与 $X(2)$ 相互独立，二维分布函数为

$$F(x_1,\ x_2;\ 1,\ 2)=F(x_1;\ 1)\cdot F(x_2;\ 2)$$

$$=\begin{cases}0, & x_1<0\ \text{或}\ x_2<0\\ (1-p)^2, & 0\leqslant x_1<1,\ 0\leqslant x_2<2\\ 1-p, & \begin{cases}0\leqslant x_1<1\\ x_2\geqslant 2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1\geqslant 1\\ 0\leqslant x_2<2\end{cases}\\ 1, & x_1\geqslant 1,\ x_2\geqslant 2\end{cases}.$$

例 2 设随机过程 $Z(t)=(X^2+Y^2)t$，$t>0$，其中 X 与 Y 是相互独立的标准正态随机变量．试求：此过程的一维概率密度．

解 依题意可知 $X\sim N(0,\ 1)$，$Y\sim N(0,\ 1)$，X 与 Y 相互独立，所以，X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right),\ -\infty<x,\ y<+\infty.$$

1）当 $z>0$ 时，

$$F(z;t)=P\{Z(t)\leqslant z\}=P\{(X^2+Y^2)t\leqslant z\}$$
$$=P\left\{X^2+Y^2\leqslant\frac{z}{t}\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{z}{t}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=\left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}=1-\exp\left(-\frac{z}{2t}\right);$$

2）当 $z\leqslant 0$ 时，

$$F(z;t)=P\{Z(t)\leqslant z\}=P\{(X^2+Y^2)t\leqslant z\}$$
$$=P\left\{X^2+Y^2\leqslant\frac{z}{t}\right\}=0,$$

于是，$Z(t)$ 的一维概率密度为

$$f(z;t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z;t)=\begin{cases}\frac{1}{2t}\exp\left(-\frac{z}{2t}\right), & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}.$$

10.2.3 两个随机过程的有限维联合分布及独立性

设 $\{X(t),t\in T_1\}$ 和 $\{Y(t),t\in T_2\}$ 是两个随机过程，由 $X(t)$ 的任意 m 个状态 $X(t_1),\ldots,X(t_m)$ 和 $Y(t)$ 的任意 n 个状态 $Y(t_1'),\ldots,Y(t_n')$ 组成 $m+n$ **维随机向量**。其分布函数:

$$F_{XY}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n;t_1,\ldots,t_m,t_1',\ldots,t_n')$$

称为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $m+n$ **维联合分布函数。**

如果对于任何正整数 m 和 n，对于 T_1 和 T_2 中的任意数组，关系式:

$$\begin{aligned}&F_{XY}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n;t_1,\ldots,t_m,t_1',\ldots,t_n')\\=&F_X(x_1,\ldots,x_m;t_1,\ldots,t_m)\cdot F_Y(y_1,\ldots,y_n;t_1',\ldots,t_n')\end{aligned}$$

都成立，则称**两个随机过程相互独立。**

10.3 随机过程的数字特征

10.3.1 随机过程的数字特征

参数集 $T\subset(-\infty,+\infty)$，随机变量族 $\{X(t),t\in T\}$ 是一个随机过程，对于任意给定 $t_0\in T$, 过程在 t_0 的状态 $X(t_0)$ 是随机变量，一维概率密度 $f(x;t_0)$。

1. 过程在 t 的状态 $X(t)$ 的**数学期望**

$$\mu_X(t)=E[X(t)]$$

对于一切 $t \in T$，$\mu_X(t)$ 是 t 的函数，称为随机过程 $X(t)$ 的**均值函数**，简称**均值。**

2. 过程在 t 的状态 $X(t)$ 的**二阶原点矩**

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$$

称为随机过程 $X(t)$ 的**均方值函数**，简称**均方值**

3. 过程在 t 的状态 $X(t)$ 的二阶中心矩

$$\begin{aligned}\sigma_X^2(t) &= D[X(t)] \\ &= E[X(t) - EX(t)]^2 \\ &= E[X(t) - \mu_X(t)]^2 \\ &= E[X^2(t)] - \mu_X^2(t)\end{aligned}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的**方差函数**，简称**方差。标准差/均方差**函数 $\sigma_X(t)$

4. 任选 $t_1, t_2 \in T$，状态 $X(t_1), X(t_2)$ 是两个随机变量

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

称为随机过程 $X(t)$ 的**自相关函数**，简称**相关函数**

5.
$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\ &= E\{[X(t_1) - EX(t_1)] \cdot [X(t_2) - EX(t_2)]\} \\ &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)] \cdot [X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}\end{aligned}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的**自协方差函数**，简称**协方差函数**

- **均值、均方值、方差**是刻画随即过程在**各个状态**的统计特性
- **相关函数和协方差函数**是刻画随机过程的**任何两个不同状态**的统计特性

数字特征间的关系

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = E[X(t) \cdot X(t)] = R_X(t, t)$$

$$\begin{aligned}C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\ &= E[X(t_1) \cdot X(t_2)] - EX(t_1) \cdot EX(t_2) \\ &= R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X(t_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2(t) = D[X(t)] &= E[X(t) - EX(t)]^2 \\ &= C_X(t, t) \\ &= R_X(t, t) - \mu_X^2(t) \\ &= \Psi_X^2(t) - \mu_X^2(t)\end{aligned}$$

10.3.2 连续型随机过程的数字特征

对连续型随机过程 $X(t)$，设一维概率密度为 $f_1(x_1;t)$，则有

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x;t)dx$$

$$\Psi_X^2(t)=E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x;t)\,dx$$

任选 $t_1,t_2\in T$，状态 $X(t_1),X(t_2)$ 是两个随机变量，二维概率密度 $f(x_1,x_2;t_1,t_2)$ ，则有

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2\end{aligned}$$

例1

例 1 设随机相位正弦波为

$$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta),-\infty<t<+\infty,$$

式中，a，ω 是常数；Θ 是在区间（0，2π）上服从均匀分布的随机变量．求：$X(t)$ 的均值函数、方差函数、自相关函数和自协方差函数．

解 依题意可知 Θ 的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

（1）均值函数

$$\begin{aligned}\mu_X(t)&=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}a\cos(\omega t+\theta)\cdot f(\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0\ ;\end{aligned}$$

（2）方差函数 $\sigma_X^2(t)=C_X(t,\ t)=\dfrac{a^2}{2}$；

（3）自相关函数

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]\\&=E[a\cos(\omega t_1+\Theta)\cdot a\cos(\omega t_2+\Theta)]\\&=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t_1+\theta)\cdot a\cos(\omega t_2+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\omega t_2-\omega t_1)+\cos(\omega t_2+\theta+\omega t_1+\theta)}{2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1)\ ;\end{aligned}$$

（4）自协方差函数

$$\begin{aligned}C_X(t_1,t_2)&=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\cdot\mu_X(t_2)\\&=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1).\end{aligned}$$

例2

例 2 设随机过程 $Z(t)=X+Yt$，$-\infty<t<+\infty$，其中 X 服从 $N(a, \sigma_1^2)$，Y 服从 $N(b, \sigma_2^2)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\rho$，求：$Z(t)$ 的自相关函数．

解 $Z(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned}R_Z(t_1,t_2)&=E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)]\\&=E[(X+Yt_1)\cdot(X+Yt_2)]\\&=E[X^2+t_1t_2Y^2+(t_1+t_2)XY]\\&=EX^2+t_1t_2EY^2+(t_1+t_2)E(XY).\end{aligned}$$

因为 $X\sim N(a, \sigma_1^2)$，$Y\sim N(b, \sigma_2^2)$，所以 $EX=a$，$DX=\sigma_1^2$，$EX^2=DX+(EX)^2=\sigma_1^2+a^2$，$EY=b, DY=\sigma_2^2$，$EY^2=DY+(EY)^2=\sigma_2^2+b^2$.

由 $\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-EX\cdot EY$，$\rho=\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$，得

$$\begin{aligned}E(XY)&=\mathrm{Cov}(X,Y)+EX\cdot EY\\&=\rho\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}+EX\cdot EY\\&=\rho\sigma_1\sigma_2+ab,\end{aligned}$$

于是 $$R_Z(t_1,t_2)=(a^2+\sigma_1^2)+t_1t_2(b^2+\sigma_2^2)+(t_1+t_2)(\rho\sigma_1\sigma_2+ab).$$

10.3.3 两个随机过程的互相关函数

两个随机过程 $\{X(t), t\in T_1\}$ 和 $\{Y(t), t\in T_2\}$，任选 $t_1\in T_1, t_2\in T_2$，对应有过程 $X(t)$ 在 t_1 的状态 $X(t_1)$，过程 $Y(t)$ 在 t_2 的状态 $Y(t_2)$。

1. $X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$ 的二阶原点混合矩

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$

称为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的**互相关函数**

2. $X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$ 的二阶中心混合矩

$$\begin{aligned}C_{XY}(t_1,t_2)&=\mathrm{cov}[X(t_1),Y(t_2)]\\&=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\}\end{aligned}$$

称为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的**互协方差函数**
且有

$$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$$

3. 如果对任意 $t_1\in T_1, t_2\in T_2$，都有 $C_{XY}(t_1,t_2)=0$，亦即 $E[X(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)Y(t_2)]$，则称随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是不相关的。
显然，两个**相互独立**的随机过程**必不相关**

例

例 3 设某接收机收到周期信号电压 $S(t)$ 和噪声电压 $N(t)$，且设 $E[N(t)]=0$，$N(t)$ 与 $S(t)$ 互不相关．试导出输出电压 $V(t)=S(t)+N(t)$ 的均值、自相关函数与输入电压的数字特征的关系．

解 $V(t)$ 的均值函数为

$$\begin{aligned}\mu_V(t)&=E[V(t)]=E[S(t)+N(t)]\\&=E[S(t)]+E[N(t)]=\mu_S(t).\end{aligned}$$

$V(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_V(t_1,t_2)&=E[V(t_1)\cdot V(t_2)]\\&=E\{[S(t_1)+N(t_1)]\cdot[S(t_2)+N(t_2)]\}\\&=E[S(t_1)\cdot S(t_2)]+E[S(t_1)\cdot N(t_2)]+E[S(t_2)\cdot N(t_1)]+\\&\quad E[N(t_1)\cdot N(t_2)],\end{aligned}$$

由于 $N(t)$ 与 $S(t)$ 互不相关，有

$E[S(t_1)\cdot N(t_2)]=E[S(t_1)]\cdot E[N(t_2)]=0$，$E[S(t_2)\cdot N(t_1)]=E[S(t_2)]\cdot E[N(t_1)]=0$，

于是得到 $$R_V(t_1,t_2)=R_S(t_1,t_2)+R_N(t_1,t_2).$$

第11章 平稳过程 笔记04的11

随机过程(2)：平稳过程

- 概念：严格平稳过程，宽平稳过程，时间平均(均值函数和自相关函数),遍历性
- 知识点：计算随机过程的一阶矩和二阶矩函数(验证平稳性) 计算简单随机过程的时间平均(验证遍历性)
- 例子：贝努利过程；随机相位正弦波；白噪声

11.1 严平稳过程

11.1.1 严平稳过程的定义

对于任意实数 ε，如果随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的任意 n 维分布满足：

$$\begin{aligned}&F(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)\\=&F(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon,\ldots,t_n+\varepsilon)\end{aligned}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

（严平稳条件）

则 $X(t)$ 称为**严**，**强**或**狭义**平稳过程。

若参数 t 表示“时间”，则严平稳过程的**任何有限维概率分布**不随时间的平移而变化。

11.1.2 严平稳过程的性质

1. 状态**离散**的随机过程 $X(t)$ 的严平稳条件

$$\begin{aligned} &P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \ldots, X(t_n)=x_n\} \\ =&P\{X(t_1+\varepsilon)=x_1, X(t_2+\varepsilon)=x_2, \ldots, X(t_n+\varepsilon)=x_n\} \end{aligned}$$

2. 状态**连续**的随机过程 $X(t)$ 的严平稳条件

$$f(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = f(x_1, \ldots, x_n; t_1+\varepsilon, \ldots, t_n+\varepsilon)$$

3. 特殊地，取 $\varepsilon=-t_1, t_2-t_1=\tau$
   - 一维分布函数

$$F(x_1; t_1) = F(x_1; t_1+\varepsilon) = F(x_1; 0) = F(x_1)$$

   - 二维分布函数

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2; t_1; t_2) &= F(x_1, x_2; t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon) \\ &= F(x_1, x_2; 0, \tau) \\ &= F(x_1, x_2, \tau) \end{aligned}$$

- **一维分布函数** $F(x)$：不依赖于参数 t
- **二维分布函数** $F(x_1, x_2; \tau)$：仅依赖于参数间距 $\tau=t_2-t_1$，而与 t_1, t_2 本身无关

11.1.3 严平稳过程的数字特征

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \mu_X$$

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \Psi_X^2$$

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = \Psi_X^2 - \mu_X^2 = \sigma_X^2$$

$$\begin{aligned} R(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; \tau)\, dx_1 dx_2 \\ &= R_X(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_X(t, t+\tau) &= R(t, t+\tau) - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau) \\ &= R_X(\tau) - \mu_X^2 = C_X(\tau) \end{aligned}$$

定理

设 $\{X(t), t\in T\}$ 是严平稳过程，如果过程的二阶矩存在，那么

- $\mu_X, \sigma_X^2, \Psi_X^2$ 均为常数，与参数 t 无关；
- $R_X(\tau), C_X(\tau)$ 仅依赖于 τ

注：

这一性质也称为**数字特征的平稳性**

例 伯努利过程

例 1（伯努利（Bernoulli）序列） 独立重复地进行某项试验，每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，失败的概率为 $1-p$. 以 X_n 表示第 n 次试验成功的次数，试证：$\{X_n, n=1, 2, 3, \cdots\}$是严平稳过程．

证明 设$\{X_n=0\}$= “第 n 次试验失败”，$\{X_n=1\}$= “第 n 次试验成功”，则

$$P\{X_n=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, \quad k=0, 1,$$

且$\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$是独立随机序列．

任取 m 个正整数：$i_1, i_2, \cdots, i_m$，m 维分布律

$$\begin{aligned} &P\{X_{i_1}=k_1, X_{i_2}=k_2, \cdots, X_{i_m}=k_m\} \\ &=\prod_{r=1}^{m} P\{X_{i_r}=k_r\} \\ &=\prod_{r=1}^{m} p^{k_r}(1-p)^{1-k_r}, \quad k_r=0, 1. \end{aligned}$$

m 维分布律不依赖于 $i_1, i_2, \cdots, i_m$，对任意正整数 l，必有

$$\begin{aligned} &P\{X_{i_1+l}=k_1, X_{i_2+l}=k_2, \cdots, X_{i_m+l}=k_m\} \\ &=\prod_{r=1}^{m} P\{X_{i_r+l}=k_r\}=\prod_{r=1}^{m} p^{k_r}(1-p)^{1-k_r} \\ &=P\{X_{i_1}=k_1, X_{i_2}=k_2, \cdots, X_{i_m}=k_m\}, \end{aligned}$$

故伯努利序列$\{X_n, n=1, 2, 3, \cdots\}$是严平稳过程．

例 2 设 X, Y 是相互独立的标准正态随机变量，$Z(t)=(X^2+Y^2)t$，$t>0$. 试证：随机过程 $Z(t)$不是严平稳过程，$Z(t)$的数字特征也不具有平稳性．

证明 首先求 $Z(t)$的一维分布函数，由题设可知 $X\sim N(0, 1)$，$Y\sim N(0, 1)$，X 与 Y 独立，X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad -\infty<x, y<+\infty,$$

$$\begin{aligned} F(z; t)&=P\{Z(t)\leqslant z\} \\ &=P\{(X^2+Y^2)t\leqslant z\} \end{aligned}$$

$$=P\left\{X^2+Y^2\leqslant\frac{z}{t}\right\}.$$

(1) 若 $z\leqslant 0$，则 $F(z;\ t)=0$；

(2) 若 $z>0$，则

$$F(z;\ t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{z}{t}} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{z}{t}} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}=1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2t}},$$

于是 $F(z;\ t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2t}}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$，显然它依赖于参数 t，故对任意实数 ε，$F(z;\ t)\neq F(z;\ t+\varepsilon)$，即 $Z(t)$ 不是严平稳过程．

$Z(t)$ 的一维概率密度 $f(z;\ t)=\begin{cases}\frac{1}{2t}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2t}}, & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$ 服从参数为 $\lambda=\frac{1}{2t}$ 的指数分布，$E[Z(t)]=\frac{1}{\lambda}=2t$ 依赖于 t，即 $Z(t)$ 的均值函数不满足平稳性．

11.2 宽（广义）平稳过程

11.2.1 宽平稳过程的定义

设随机过程 $X(t)$，对于任意 $t\in T$，满足：

1. $E[X^2(t)]<+\infty$
2. $E[X(t)]=\mu_X$ 是常数
3. $E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$ 仅依赖于 τ，而与 t 无关

则称 $X(t)$ 为**宽**，**弱**或**广义**平稳过程，简称**平稳过程**。

参数集 T 为**可列集**的平稳过程，又称为**平稳序列**，或称平稳时间序列。

11.2.2 平稳过程的例子

例1 证明是平稳过程

例 1 随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，其中 a 和 ω 是常数，Θ 是区间 $(0,\ 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量．验证：$X(t)$ 是平稳过程．

验证 $E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]=\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$ 是常数，

$E[X(t)X(t+\tau)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)\cdot a\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)]=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$ 仅依赖于 τ，

$E[X^2(t)]=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau\big|_{\tau=0}=\frac{a^2}{2}$ 是常数，所以，$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$ 是平稳过程．

例2 证明是平稳过程

例 2 随机振幅正弦波 $Z(t)=X\cos 2\pi t+Y\sin 2\pi t$，其中 X 和 Y 都是随机变量，且 $EX=EY=0$，$DX=DY=1$，$E(XY)=0$. 验证：$Z(t)$ 是平稳过程．

验证 由已给条件知 $EX^2=EY^2=1$，

$$
\begin{aligned}
E[Z(t)]&=E(X\cos 2\pi t+Y\sin 2\pi t)\\
&=\cos 2\pi t\cdot EX+\sin 2\pi t\cdot EY=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[Z(t)Z(t+\tau)]&=E\{(X\cos 2\pi t+Y\sin 2\pi t)\cdot[X\cos 2\pi(t+\tau)+Y\sin 2\pi(t+\tau)]\}\\
&=\cos 2\pi t\cos 2\pi(t+\tau)+\sin 2\pi t\sin 2\pi(t+\tau)\\
&=\cos 2\pi\tau,
\end{aligned}
$$

$$E[Z^2(t)]=1.$$

所以，$Z(t)$ 是平稳过程．

例3 证明是平稳序列

例 3（白噪声序列） 互不相关的随机变量序列 $\{X_n,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$，$EX_n=0$，$DX_n=\sigma^2\neq 0$，验证其是一个平稳序列．

验证 取 τ 为任意非零整数，由 X_n 与 $X_{n+\tau}$ 互不相关，有

$$E(X_nX_{n+\tau})=E(X_n)\cdot E(X_{n+\tau})=0,$$

$$EX_n^2=DX_n+(EX_n)^2=\sigma^2,$$

所以，$\{X_n,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ 是一个平稳序列．

例4 证明是平稳序列

例 4（通信系统中的加密序列） 设$\{\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \cdots, \xi_n, \eta_n, \cdots\}$是相互独立的随机变量序列．$\xi_n(n=0, 1, 2, \cdots)$同分布，$\eta_n(n=0, 1, 2, \cdots)$同分布，$E\xi_n=E\eta_n=0$，$D\xi_n=D\eta_n=\sigma^2\neq0$. 设 $X_n=\xi_n+\eta_n+(-1)^n(\xi_n-\eta_n)$，验证：加密序列$\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$是平稳序列．

验证 $X_n=[1+(-1)^n]\xi_n+[1+(-1)^{n+1}]\eta_n$，则

1）$EX_n=0$；

2）$EX_n^2=DX_n+(EX_n)^2=DX_n$
$=[1+(-1)^n]^2D\xi_n+[1+(-1)^{n+1}]^2D\eta_n=4\sigma^2$；

3）τ 为任意正整数，X_n 与 $X_{n+\tau}$ 相互独立，且

$$E(X_nX_{n+\tau})=EX_n\cdot EX_{n+\tau}=0,$$
$$E(X_nX_n)=4\sigma^2,$$

所以，$\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$是平稳序列．

例5 证明是平稳过程

例 5（随机电报信号） 电报信号用电流 I 或$-I$ 给出，任意时刻 t 的电报信号 $X(t)$是 I 或$-I$ 的概率各为$\frac{1}{2}$. 又以 $N(t)$表示时段$[0, t)$内信号变化的次数，已知$\{N(t), t\geqslant0\}$是一泊松过程，验证：$\{X(t), t\geqslant0\}$是一个平稳过程．

验证 1）$E[X(t)]=IP\{X(t)=I\}+(-I)P\{X(t)=-I\}=\frac{I}{2}-\frac{I}{2}=0$；

2）$E[X(t)X(t+\tau)]$

$$= I^2P\{X(t)X(t+\tau)=I^2\}+(-I^2)P\{X(t)X(t+\tau)=-I^2\}$$
$$= I^2\sum_{n=0}^{+\infty}P\{N(t+\tau)-N(t)=2n\}-I^2\sum_{n=0}^{+\infty}P\{N(t+\tau)-N(t)=2n+1\},$$

由泊松过程的定义可知

$$P\{N(t+\tau)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda|\tau|)^k}{k!}e^{-\lambda|\tau|}, \lambda>0, k=0, 1, 2, \cdots,$$

于是得到

$$E[X(t)X(t+\tau)]$$
$$=I^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda|\tau|)^{2n}}{(2n)!}e^{-\lambda|\tau|}-I^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda|\tau|)^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-\lambda|\tau|}$$
$$=I^2e^{-\lambda|\tau|}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda|\tau|)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda|\tau|)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$
$$=I^2e^{-\lambda|\tau|}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda|\tau|)^n}{n!}=I^2e^{-\lambda|\tau|}\cdot e^{-\lambda|\tau|}=I^2e^{-2\lambda|\tau|};$$

3）$E[X^2(t)]=I^2$，所以，$\{X(t), t\geqslant0\}$是一个平稳过程．

11.2.3 严平稳过程与宽平稳过程的关系

1. 宽平稳过程不一定是严平稳过程
2. 严平稳过程不一定是宽平稳过程
   - 存在二阶矩的严平稳过程必定是宽平稳过程

二阶矩 $E[X^2(t)] < +\infty$ 存在的随机过程称为二阶矩过程。

11.2.4 两个平稳过程的关系：平稳相关

设 $\{X(t), t \in T_1\}$ 和 $\{Y(t), t \in T_2\}$ 是两个平稳过程，如果**互相关函数** $E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau)$ 仅是参数间距 τ 的函数，则称 $\{X(t), t \in T_1\}$ 和 $\{Y(t), t \in T_2\}$ **平稳相关**，或称它们是**联合平稳**的。此时：

$$\begin{aligned} C_{XY}(\tau) &= \operatorname{cov}(X(t), Y(t+\tau)) \\ &= E[X(t)Y(t+\tau)] - E[X(t)]E[Y(t+\tau)] \\ &= R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

定义：

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_X(0) \cdot C_Y(0)}}$$

称为标准互协方差函数。

11.3 正态平稳过程

11.3.1 正态过程的概念

1. 正态随机变量的有关知识

一维正态随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

二维正态随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

n 维正态随机变量 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的概率密度

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det C)^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\}$$

其中：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

协方差矩阵 $C = (C_{ij})_{n\times n} \quad C_{ij} = Cov(X_i, X_j)$

2. 正态过程的定义

如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$，对任意正整数 n，$\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$，$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 服从正态分布，则称 $X(t)$ 为 **正态过程**，又称**高斯(Gauss)过程**。

设 $\{X(t), t \in T\}$ 为正态过程，则:

$$\begin{aligned} &\forall t_1 \in T, X(t_1) \sim N(\mu_X(t_1), \sigma_X^2(t_1)) \\ &\forall t_1, t_2 \in T, (X(t_1), X(t_2)) \sim N(\mu_X(t_1), \sigma_X^2(t_1); \mu_X(t_2), \sigma_X^2(t_2); \rho) \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)} \cdot \sqrt{\sigma_X^2(t_2)}}$$

3. 独立正态过程的定义

如果 $\{X(t), t \in T\}$ 是正态过程，同时又是独立过程，则称 $X(t)$ 为**独立正态过程**。

正态过程 $\{X(t), t \in T\}$，如果 T 是可列集，$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$，记 $X(t) = X_t$，那么 $\{X_t, t = t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ 是**正态序列**。

4. 正态过程是二阶矩过程

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是正态过程，$X(t)$ 服从正态分布，则:

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$$

必存在，即二阶矩存在。

11.3.2 正态平稳过程

1. 定义

如果**正态过程** $X(t)$ 又是**广义平稳过程**，则称 $X(t)$ 为正态平稳过程。

2. 定理

设 $X(t)$ 是正态过程，则 $X(t)$ 为严平稳过程 $\Leftrightarrow$ 宽平稳过程。

3. 例题

例1 正态平稳过程的一维、二维服从的分布

例 1 设正态过程 $\{X(t),\ -\infty<t<+\infty\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)=0$，自相关函数 $R_X(t_1, t_2)=R_X(t_2-t_1)$，试写出该过程的一维、二维服从的分布．

解 根据题设条件知 $X(t)$ 服从正态分布，$(X(t_1), X(t_2))$ 服从二维正态分布，$E[X(t)]=\mu_X(t)=0$，$D[X(t)]=E[X^2(t)]-\{E[X(t)]\}^2=R_X(t, t)=R_X(0)$，即得 $X(t)\sim N(0, R_X(0))$，$E[X(t_i)]=\mu_X(t_i)=0$，$D[X(t_i)]=R_X(0)$，$i=1, 2$，

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X(t_1), X(t_2))&=E[X(t_1)X(t_2)]-E[X(t_1)]\cdot E[X(t_2)]\\&=R_X(t_1, t_2)=R_X(t_2-t_1),\end{aligned}$$

$$\rho=\frac{\operatorname{Cov}(X(t_1), X(t_2))}{\sqrt{DX(t_1)}\cdot\sqrt{DX(t_2)}}=\frac{R_X(t_2-t_1)}{R_X(0)},$$

于是 $$(X(t_1), X(t_2))\sim N\left(0, R_X(0); 0, R_X(0); \frac{R_X(t_2-t_1)}{R_X(0)}\right).$$

例2 证明平稳过程

例 2 设 $X(t)$ 是正态平稳过程，且 $E[X(t)]=\mu_X(t)=0$，令

$$Y(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } X(t)<0 \\ 0, & \text{当 } X(t)\geqslant 0\end{cases},$$

证明：$Y(t)$ 是平稳过程．

证明 因为 $X(t)$ 是平稳过程，所以 $R_X(t_1, t_2)=R_X(t_2-t_1)$，又 $X(t)$ 是正态过程，且 $E[X(t)]=\mu_X(t)=0$，由上例知道，$X(t)\sim N(0, R_X(0))$，

$$(X(t_1), X(t_2))\sim N\left(0, R_X(0); 0, R_X(0); \frac{R_X(t_2-t_1)}{R_X(0)}\right),$$

其概率密度为

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2)=f(x_1, x_2; t_2-t_1),$$

$$P\{Y(t)=1\}=P\{X(t)<0\}=\frac{1}{2}, P\{Y(t)=0\}=P\{X(t)\geqslant 0\}=\frac{1}{2},$$

$$E[Y^2(t)]=1\cdot P\{Y(t)=1\}+0\cdot P\{Y(t)=0\}=\frac{1}{2}(\text{是常数}),$$

$E[Y^2(t)]=\dfrac{1}{2}$ 存在且有限，所以

$$\begin{aligned}
E[Y(t)Y(t+\tau)] &= 1\times 1\times P\{Y(t)=1, Y(t+\tau)=1\}+ \\
&\quad 1\times 0\times P\{Y(t)=1, Y(t+\tau)=0\}+ \\
&\quad 0\times 1\times P\{Y(t)=0, Y(t+\tau)=1\}+ \\
&\quad 0\times 0\times P\{Y(t)=0, Y(t+\tau)=0\} \\
&= P\{Y(t)=1, Y(t+\tau)=1\} \\
&= P\{X(t)<0, X(t+\tau)<0\} \\
&= \iint\limits_{\substack{x_1<0 \\ x_2<0}} f(x_1, x_2; \tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = F_X(0, 0; \tau)
\end{aligned}$$

仅依赖于 τ，故 $Y(t)$ 是平稳过程．

11.4 遍历过程（经历过程）

11.4.1 时间均值和时间相关函数

设随机过程 $\{X(t), t\in T=(-\infty, +\infty)\}$
固定 $e\in S$，样本函数 $X(e,t)=x(t)$，$x(t)$ 在区间 $[-l, l]$ $(l>0)$ 上的函数平均值定义为：

$$\overline{x(t)}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}x(t)\,dt$$

$x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的**函数平均值**定义为：

$$\overline{x(t)}=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}x(t)\,dt\$\$\text{当}\$e\$\text{变化时，}$$

\overline{x(t)} = \overline{X(e,t)} = \lim\limits{l \to +*\infty}*
\dfrac{1}{2l}\int^l{-l}X(e, t),dt

是随机过程$X(t)$对于参数t的$**$平均值$**$，称为随机过程$X(t)$的$**$

\begin{aligned}
\overline{X(t)X(t + \tau)}
= & \overline{X(e, t)X(e, t + \tau)}\
= & \lim\limits{l \to +\infty}
\dfrac{1}{2l}
\int^l{-l}
X(e, t)X(e, t + \tau),dt
\end{aligned}

称为随机过程$X(t)$的$**$时间相关函数$**$。随机过程${X(t), t \in T = [0, +$

\begin{aligned}
&\overline{X(t)} = \lim\limits{l \to +\infty}
\dfrac{1}{l}
\int_0^l X(e, t), dt\
&\overline{X(t)X(t + \tau)} = \lim\limits{l \to +\infty}
\dfrac{1}{l}
\int_0^l X(e, t)X(e, t + \tau), dt
\end{aligned}

`### 11.4.2 各态遍历性 设 $X(t)$ 是一个平稳过程，$T=(-\infty, +\inf`

\lim\limits_{l \to +\infty}
\dfrac{1}{l} \int_0^{2l}
(1 - \dfrac{\tau}{2l})[R_X(\tau) - \mu^2_X],d\tau = 0

`##### 定理2 设 $\{X(t), t\in T = [0,+\infty)\}$ 是一均方连续的平稳`

\lim\limits_{l \to +\infty}
\dfrac{1}{l} \int_0^{l}
(1 - \dfrac{\tau}{l})[R_X(\tau) - \mu^2_X],d\tau = 0

`### 11.4.3 遍历过程的数字特征 ![[Pasted image 20241211145336.png|3`

P=
\left(
\begin{array}
&p{00}&p{01}&\cdots&p{0j}&\cdots\
p{10}&p{11}&\cdots&p{1j}&\cdots\
\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\cdots\
p{i0}&p{i1}&\cdots&p_{ij}&\cdots\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots
\end{array}
\right)

`**称为（一步）转移概率矩阵**。 ##### （一步）转移概率矩阵的性质 1.`

p{ij}^{(n+l)}(t_m)=
\sum\limits{k \in S} p{ik}^{(n)}(t_m) \cdot p^{(l)}{kj}(t_{m+n})

称为**科尔莫戈罗夫-查普曼**方程。 ###### 注： 1. 如果马尔可夫链具有

p_{j}(t_0)=P{X(t_0)=j}, \quad j=0, 1, 2, ...

2. n 维概率分布 设**齐次马尔可夫链**的参数集和状态空间都是

\begin{aligned}
&P{X(k1) = j_1, X(k_2)=j_2, ..., X(k_n) = j_n}\
=& \sum\limits{i=0}^{+\infty}pi(0)\cdot p{ij1}^{(k_1)}\cdot p{j1j_2}^{(k_2 - k_1)}...p{j{n-1}j_n}^{(k_n-k{n-1})}
\end{aligned}

例 ![[Pasted image 20241218111822.png|600]] #### 3. 绝对分布

p_j(t_n)=P{X(t_n)=j},\quad j = 0,1,2,...

———齐次马尔可夫链在时刻t_n的瞬时概率完全由初始分布和n步转移概

pj(t_n)=\sum\limits{i=0}^{+\infty} pi(t_0)\cdot p{ij}^{(n)},\quad j=0, 1, 2,...

向量形式：

\begin{aligned}
&\big(p_0(t_n), p_1(t_n), ..., p_j(t_n), ...\big)\
=&\big(p_0(t_0), p_1(t_0), ..., p_j(t_0), ...\big)\cdot P^n
\end{aligned}

其中n步转移概率矩阵 $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) = P^{n}$ 设 $\pi_{n}

pj=\sum\limits{i=0}^{+\infty}pip{ij}

或

(p_0, p_1, p_2, ..., p_j, ...)=(p_0, p_1, p_2, ..., p_j, ...)\cdot P

则称 $p_j,\space j=0,1,2,...$ 为**平稳分布**，称 $X(t)$ 具有**平稳

p_j(t_n) = P{X(t_n)=j}=p_j(t_0),\space j=0,1,2,...

\big(p_0(t_n), p_1(t_n), ..., p_j(t_n), ...\big)
=\big(p_0(t_0), p_1(t_0), ..., p_j(t_0), ...\big)

是一个严平稳时间序列。 ###### 例 ![[Pasted image 20241218112403.png